AM5 2006: RECUPERO II ESONERO

TEMA 1.

Siano $\quad q, r \geq 1, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$ Provare che

$$g \in L^q(\mathbf{R}^n), \quad h \in L^r(\mathbf{R}^n) \quad \Rightarrow \quad h * g \in C(\mathbf{R}^n) \quad \text{e} \quad \sup_{|x| \geq R} |h * g|(x) \to_{R \to +\infty} 0$$

TEMA 2.

Sia $\quad 0 \leq \varphi \quad$ sommabile in $\quad \mathbf{R}^n \quad$ tale che $\quad \int_{\mathbf{R}^n} \varphi \; = \; 1.$

Sia $\quad \varphi_\epsilon(x) \; := \; \epsilon^{-n} \varphi(\frac{x}{\epsilon}).$ Provare che

$$\int |\varphi_\epsilon * f - f\,|^p \;\; \to_{\epsilon \to 0} 0 \qquad \forall f \in L^p(\mathbf{R}^n)$$

TEMA 3.

Provare la diseguaglianza di Sobolev:

$$\exists c = c(N) : \quad \left(\int_{\mathbf{R}^N} |u|^{\frac{2N}{N-2}} \right)^{\frac{N-2}{N}} \leq \; c \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \qquad \forall u \in H^1(\mathbf{R}^N)$$

TEMA 4.

Sia $\quad f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N).$ Provare che

$$\frac{1}{vol(B_r)} \int_{B_r(x)} |f(x) - f(y)|\, dy \; \to_{r \to 0} 0 \qquad q.o. \; x$$

ESERCIZIO 1.

Sia $f(x) = \sqrt{\frac{1}{|x|(1+\log^2|x|)}}, x \in \mathbf{R}$.

Stabilire per quali $p \geq 1$ risulta $f * \chi_{[-1,1]} \in L^p$.

ESERCIZIO 2.

Sia $f_n : \mathbf{R} \to [0, +\infty)$ non decrescente e tale che $\inf_{\mathbf{R}} f_n(x) = 0$. Provare che

$f(x) := \sum_n f_n(x) < +\infty \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad f$ é derivabile quasi ovunque e

$$f'(x) = \sum_n f_n'(x) \quad \text{quasi per ogni } x \in \mathbf{R}.$$

ESERCIZIO 3.

Sia $f \in L^p(\mathbf{R}^3)$, $p > 1$, f a supporto compatto.

Provare che la funzione $x \to \int \frac{f(y)dy}{|x-y|}$ ha derivate prime (deboli) localmente sommabili, date da

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int \frac{f(y)dy}{|x-y|} = -\int \frac{f(y)(x_j - y_j)dy}{|x-y|^3}$$