AM5 2006: RECUPERO I ESONERO

TEMA 1.

Provare che L^2 é uno spazio di Hilbert.

TEMA 2.

Sia $f_n \in L^p \quad p > 1$ successione debolmente convergente. Provare che

$$\sup_n \|f_n\|_p < +\infty$$

TEMA 3.

Sia $C \subset L^p, \quad p > 1$ chiuso e convesso. Provare che

$$f_n \in C, \quad f_n \rightharpoonup_n f \qquad \Rightarrow \qquad f \in C$$

TEMA 4.

Sia $g \in L^1$. Provare che, se esiste $c \in \mathbf{R}$ tale che

$$0 < \mu(E) < +\infty \quad \Rightarrow \quad |\frac{1}{\mu(E)} \int_E g| \leq c$$

allora $\|g\|_\infty \leq c$.

Dedurre che il duale di L^1 é isometricamente isomorfo a L^∞.

ESERCIZIO 1.

Sia $A \subset \mathbf{R}$ di misura di lebesgue positiva. Provare che A ha sottoinsiemi non misurabili (secondo Lebesgue).

Dedurre che le funzioni misurabili (o addirittura continue, come la funzione di Cantor) non trasformano, in generale, insiemi misurabili in insiemi misurabili.

ESERCIZIO 2.

Provare che

$$f \in L^1 \cap L^\infty \quad \Rightarrow \quad f \in L^p \quad \forall p > 1 \qquad \text{e} \quad \|f\|_p \to_{p \to +\infty} \|f\|_\infty$$

ESERCIZIO 3.

Sia $\quad f_n \in L^p, \quad p \geq 2.$ Provare che

$$f_n \rightharpoonup_n f, \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0$$