AM5 2006: APPELLO A

TEMA 1.

Provare che L^2 é uno spazio di Hilbert.

TEMA 2.

Sia $f_n \in L^p$, $p > 1$ successione debolmente convergente. Provare che

$$\sup_n \|f_n\|_p < +\infty$$

TEMA 3.

Sia $g \in L^1$. Provare che, se esiste $c \in \mathbf{R}$ tale che

$$0 < \mu(E) < +\infty \quad \Rightarrow \quad |\frac{1}{\mu(E)} \int_E g| \leq c$$

allora $\|g\|_\infty \leq c$.

Dedurre che il duale di L^1 é isometricamente isomorfo a L^∞.

TEMA 4.

Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$. Provare che

$$\frac{1}{vol(B_r)} \int_{B_r(x)} |f(x) - f(y)| \, dy \rightarrow_{r \to 0} 0 \qquad q.o. \ x$$

ESERCIZIO 1.

Sia $A \subset \mathbf{R}$ di misura di lebesgue positiva. Provare che A ha sottoinsiemi non misurabili (secondo Lebesgue).

Dedurre che le funzioni misurabili (o addirittura continue, come la funzione di Cantor) non trasformano, in generale, insiemi misurabili in insiemi misurabili.

ESERCIZIO 2.

Provare che

$$f \in L^1 \cap L^\infty \quad \Rightarrow \quad f \in L^p \quad \forall p > 1 \qquad \text{e} \quad \|f\|_p \to_{p \to +\infty} \|f\|_\infty$$

ESERCIZIO 3.

Sia $\quad f \in L^p(\mathbf{R}^3), \quad p > 1, \quad f$ a supporto compatto.

Provare che la funzione $\quad x \to \int \frac{f(y)dy}{|x-y|} \quad$ ha derivate prime (deboli) localmente sommabili, date da

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int \frac{f(y)dy}{|x-y|} = -\int \frac{f(y)(x_j - y_j)dy}{|x-y|^3}$$