AM5: Tracce delle lezioni- VI Settimana

LO SPAZIO L^∞: DUALITÁ E COMPATTEZZA DEBOLE*

Sia μ misura su X. $\qquad L^\infty = L^\infty(X,\mu) :=$

$$\{f| \quad f \quad \text{é misurabile ed esiste} \quad c>0: \quad |f(x)|\le c \quad \text{quasi per ogni} \quad x\}$$

$$\|f\|_\infty := \inf\{c\ge 0: \quad |f(x)|\le c \quad \text{q.o.} \quad x\}$$

In effetti $\qquad \|f\|_\infty := \min\{c\ge 0: \quad |f(x)|\le c \quad \text{q.o.} \quad x\},\qquad$ perché

$$\mu(\{x: \ |f(x)| \ > \ \|f\|_\infty\}) \ = \ \mu\Big(\cup_n \{x: \ |f(x)| \ > \ \|f\|_\infty + \frac{1}{n}\}\Big) = 0$$

É facile vedere che $\quad (L^\infty, \|.\|_\infty)$ **é un Banach.**

L^∞ é il duale di L^1

Se $\quad \mu \quad$ é σ-finita, allora $\quad (L^1)' \quad$ **é isometricamente isomorfo a** $\quad L^\infty$

Teorema della Media. $\quad$ Sia $g\in L^1$. $\quad$ Allora

$$|\frac{1}{\mu(E)}\int_E g|\le c \quad \forall E \quad \text{misurabile e t.c.} \quad 0<\mu(E)<+\infty \quad \Rightarrow \quad \|g\|_\infty\le c$$

Prova. $\quad \int|g|<+\infty \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x: g(x)\ge c+\frac{1}{n}\})<\infty \quad$ e quindi

$$\mu(\{x: g(x)\ge c+\frac{1}{n}\})=0 \quad \text{perché} \quad 0<\mu(\{x: g(x)\ge c+\frac{1}{n}\})<\infty \quad \Rightarrow$$

$$c\ge \frac{1}{\mu(\{x: g(x)\ge c+\frac{1}{n}\})}\int_{\{x:g(x)\ge c+\frac{1}{n}\}} g \ge c+\frac{1}{n}$$

Dunque

$$\mu(\{x: g(x)>c\})=\mu(\cup_n\{x: g(x)\ge c+\frac{1}{n}\})=\sup_n \mu(\{x: g(x)\ge c+\frac{1}{n}\})=0$$

Ugualmente $\mu(\{x: g(x)<-c\})=0$ e quindi $|g(x)|\le c$ q.o. , ovvero $\|g\|_\infty\le c$.

Prova del Teorema di isomorfismo $\quad$ Data $\quad g\in L^\infty, \quad$ sia

$$T(g):=l_g, \qquad l_g(f)=\int fg \quad \forall f\in L^1. \qquad \text{É} \quad |l_g(f)|=|\int fg|\le \|f\|_1\|g\|_\infty$$

Dunque l_g é un funzionale lineare e continuo su L^1 con

$$\|l_g\| \leq \|g\|_\infty$$

T **é isometria** (chiaramente lineare). Si tratta di provare che $\|l_g\| \geq \|g\|_\infty$.

Intanto, $$|\int fg| = |l_g(f)| \leq \|l_g\|\|f\|_1 \quad \forall f \in L^1 \quad \Rightarrow \quad |\int_E g| \leq \|l_g\|\mu(E)$$

per ogni E misurabile di misura finita. Se $\mu(X) < +\infty$ e quindi $g \in L^1$, dal teorema della media segue che

$$\|g\|_\infty \leq \|l_g\|$$

Sia $X = \cup_j E_j$, $E_j \subset E_{j+1}$, $\mu(E_j) < +\infty$ e sia

$$l_j(f) := \int fg_j, \quad g_j := g\chi_{E_j}, \quad f \in L^1$$

e quindi $\|g_j\|_\infty \leq \|l_j\|$. Ma

$$|l_j(f)| = |\int (f\chi_{E_j})g| \leq \|l_g\|\|f\chi_{E_j}\|_1 \leq \|l_g\|\|f\|_1 \quad \Rightarrow \quad \|l_j\| \leq \|l_g\| \quad \Rightarrow$$

$$\|g_j\|_\infty \leq \|l_g\| \quad \Rightarrow \quad |g(x)| \leq \sup_j |g_j(x)| \leq \|l_g\| \quad \Rightarrow \quad \|g\|_\infty \leq \|l_g\|$$

T **é suriettiva.** Supponiamo dapprima che $\mu(X) < +\infty$. Sia $l \in (L^1)'$:

$$|l(f)| \leq \|l\|\|f\|_1 \leq \|l\|\sqrt{\mu(X)}\|f\|_2 \quad \forall f \in L^2$$

Dunque l é lineare e continuo su L^2 e quindi

$$\exists g \in L^2 : l(f) = \int fg \quad \forall f \in L^2$$

Ma $$|\int g\chi_E| = |l(\chi_E)| \leq \|l\|\mu(E) \quad \Rightarrow \quad \|g\|_\infty \leq \|l\|$$

Dunque $l(f) = l_g(f)$ $\forall f \in L^2$ e quindi, essendo L^2 denso in L^1, $l(f) = l_g(f)$ $\forall f \in L^1$.

Se $X = \cup_j E_j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, $\mu(E_j) < +\infty$, si ha

$$f \in L^1 \quad \Rightarrow \quad f = \sum_j f\chi_{E_j} \quad \Rightarrow$$

$$l(f) = \sum_j l(f\chi_{E_j}) = \sum \int f\chi_{E_j} g_j = \int f(\sum_j \chi_{E_j} g_j) = \int fg$$

con $\|g_j\| \leq \|l\|$ e quindi $\|g\|_\infty = \|\sum_j \chi_{E_j} g_j\|_\infty \leq \|l\|$.

Convergenza debole in L^1. Siano $f_n \in L^1$.

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{in} \quad L^1 \quad \Leftrightarrow \quad \int (f_n - f)h \to 0 \quad \forall h \in L^\infty$$

Nota. Diversamente da quanto accade in L^p, **succesioni limitate in L^1 non hanno, in generale, estratte debolmente convergenti**.

Sia ad esempio $0 \le f, \ f \in\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N), \quad \int f = 1, \quad f_n(x) := n^N f(nx)$. É

$$\int_{\mathbf{R}^N} |f_n| dx \quad = \quad \int_{\mathbf{R}^N} |f|, \qquad f_n(x) \to_n 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\int_{\mathbf{R}^N} f_n(x) g(x) dx \quad = \quad \int_{\mathbf{R}^N} f(y) \ g(\frac{y}{n}) dy \to g(0) \qquad \forall g \in C_0(\mathbf{R}^N)$$

Si ha che $\exists n_k, \quad \exists \hat{f} \in L^1 : \qquad \int f_{n_k} g \to \int \hat{f} g \quad \forall h \in C_0^\infty \quad \Rightarrow$

$$g(0) = \lim_k \int_{\mathbf{R}^N} f_{n_k} g = \int_{\mathbf{R}^N} \hat{f}(x) g(x) dx = \lim_n \int_{\mathbf{R}^N} \hat{f} g(nx) \quad = \ 0 \quad \forall g \in C_0(\mathbf{R}^N)$$

contraddizione se $g(0) \neq 0$.

Il duale di L^∞ non é L^1

Data $g \in L^1(X, \mu)$, sia $\quad l_g(f) := \int_X f g d\mu, \quad f \in L^\infty, \quad L(g) := l_g$.

Siccome $|l_g(f)| \le \|g\|_1 \ \|f\|_\infty, \quad l_g \in (L^\infty)'$ e $\|Lg\|_\infty \le \|g\|_1$ é operatore lineare continuo di L^1 in $(L^\infty)'$. Di piú, presa $f = sign \ g, \quad \|l_g\| \ge \int |g|$. Dunque

$L(g) := l_g$ é **isometria lineare** di L^1 in $(L^\infty)'$.

In questo caso peró L **non** é, in generale, **suriettiva**. Ad esempio, se

$$l(\varphi) := \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

l é funzionale lineare continuo su C_0^∞, e, per il Teorema di Hahn-Banach, l ha un prolungamento lineare e continuo su tutto L^∞, che indichiamo ancora con l. Se esistesse $g \in L^1 : \quad l(f) = \int g f, \quad \forall f \in L^\infty$ sarebbe

$$\varphi(0) \quad = \quad \int g(x) \, \varphi(nx) \, dx \to_n 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N) \quad : \qquad \text{contraddizione .}$$

Convergenza debole* in L^∞ e compattezza debole*. Siano $f_n \in L^\infty$.

$$f_n \rightharpoonup^* f \quad \Leftrightarrow \quad \int (f_n - f)h \to 0 \quad \forall h \in L^1$$

Se L^1 é separabile, allora $\sup_n \|f_n\|_\infty < +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists n_k,\ f \in L^\infty : \quad f_{n_k} \rightharpoonup^* f$

Infatti : $\sup_n |\int f_n h| \le (\sup_n \|f_n\|_\infty)\, \|h\|_1 \ \forall\, h \in L^1 \Rightarrow$ (procedimento diagonale di Cantor !) $\exists n_k : \quad l(h) := \lim_k \int f_{n_k} h$ esiste finito $\forall h \in D \subset L^1$ numerabile e denso; l si prolunga in modo lineare e continuo a tutto L^1 e quindi

$$\exists g \in L^\infty : \quad \lim_k \int f_{n_k} h = l(h) = \int gh \quad \forall h \in D$$

e quindi (in modo standard) $\lim_k \int f_{n_k} h = \int gh \quad \forall h \in L^1$.

Funzionali lineari continui e misure. Sia $g \in L^1(X, \Sigma, \mu)$. Allora

$$l_g(f) = \int fg, \qquad f \in L^\infty, \qquad \mu_g(E) := l_g(\chi_E) = \int_E g, \quad E \in \Sigma_\mu$$

($g \ge 0 \ \Rightarrow\ \mu_g$ é misura e l_g é positivo : $f \ge 0 \quad \Rightarrow \quad l(f) \ge 0$) hanno le proprietá:

(i) $f_n \rightharpoonup^* 0 \ \Rightarrow\ l_g(f_n) \to 0$, (ii) $\mu_g(X) < +\infty$ e $\mu(E) = 0 \ \Rightarrow\ \mu_g(E) = 0$

Viceversa: $l \in (\text{Ł}^\infty)'$ é positivo e soddisfa (i) $\Rightarrow$ $\exists \nu = \nu_l$ misura soddisfacente (ii) e $l(f) = \int f d\nu, \quad \forall f \in L^\infty(\mu)$

Infatti $\nu_l(E) := l(\chi_E) \ge 0 \quad \forall E \in \Sigma, \quad E \in \Sigma$ é misura perché ,

se $E_j \in \Sigma, \quad E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \ne j$, allora $\nu_l(\cup_{j=1}^\infty E_j) = \sum_{j=1}^n l(\chi_{E_j}) + l(\chi_{\cup_{j\ge n+1} E_j})$

$$= \sum_{j=1}^n \nu_l(E_j) + l(\chi_{\cup_{j\ge n+1} E_j}) \to_n \sum_{j=1}^\infty \nu_l(E_j) \quad \text{perché} \quad \chi_{\cup_{j\ge n+1} E_j} \to_n 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow$$

$$\int \chi_{\cup_{j\ge 1} E_j}\ h \to_n 0 \quad \forall h \in L^1 \quad \text{(Lebesgue!)} \quad \Rightarrow \quad l(\chi_{\cup_{j\ge n+1} E_j}) \to_n 0$$

Poi, ν_l soddisfa (ii): $\nu_l(X) = l(\chi_X), \quad \mu(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu_l(E) = l(\chi_E) = 0$. Ció assicura che $f, g \in L^\infty(\mu),\ f = g\ \mu q.o. \ \Rightarrow\ f, g \in L^\infty(\nu_l)$ e $f = g\ \nu_l q.o. \ \Rightarrow\ \int f d\nu_l = \int g d\nu_l$. Infine, $l(f) = \int f d\nu_l$ se $f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j} \in L^\infty(\mu)$ (linearitá) e quindi $\forall f \in L^\infty(\mu)$ per continuitá: $0 \le \varphi_j \le f \in L^\infty(\mu), \quad \varphi_j(x) \to_j f(x) \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad \int \varphi_j h d\mu \to \int fh \quad \forall f \in L^1(\mu)$ (Lebesgue!) $\Rightarrow \quad \int \varphi_j d\nu = l(\varphi_j) \to l(f)$ mentre $\int \varphi_j d\nu \to \int f d\nu$ (Lebesgue!).

IL TEOREMA DI RADON-NIKODYM

Sia Σ sigma algebra di sottoinsiemi di X; siano $\nu, \mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ misure, rispettivamente finita, *sigma*- finita. Allora $\exists \hat{h} \in L^1(X, \mu)$, $\exists Z \in \Sigma$ con $\mu(Z) = 0$ tali che

$$\nu(E) = \int_E f d\mu + \nu(E \cap Z) \quad \forall E \in \Sigma$$

Prova. Supponiamo dapprima $\mu(X) < +\infty$. Sia

$$\lambda(E) = \mu(E) + \nu(E), \quad E \in \Sigma$$

per cui $\lambda(E) \geq \mu(E), \quad \lambda(E) \geq \nu(E) \quad \forall E \in \Sigma, \qquad \lambda(X) < +\infty$

e quindi, per ogni φ semplice e non negativa,

$$\int \varphi \, d\lambda \geq \int \varphi \, d\mu, \qquad \int \varphi \, d\lambda \geq \int \varphi \, d\nu$$

e quindi, per ogni f Σ-misurabile

$$\int |f| \, d\lambda = \int |f| \, d\mu + \int |f| \, d\nu \qquad \int |f| \, d\lambda \geq \int |f| \, d\mu, \qquad \int |f| \, d\lambda \geq \int |f| \, d\nu$$

In particolare, $L^1(\lambda) \subset L^1(\nu)$ e $f \to \int f \, d\nu$ é continuo in $L^1(\lambda)$ e quindi

$$(*) \qquad \exists h \in L^\infty(\lambda) : \quad \int f \, d\nu = \int f \, h \, d\lambda \quad \forall f \in L^1(\lambda)$$

Inoltre, $\lambda(E) > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{\lambda(E)} \int_E h \, d\lambda = \frac{1}{\lambda(E)} \int \chi_E \, d\nu = \frac{\nu(E)}{\lambda(E)} \leq 1$

$$\Rightarrow \qquad 0 \leq h \leq 1 \quad \lambda - q.o.$$

Iteriamo ora $(*)$:

$$(**) \qquad \int f \, d\nu = \int f \, h \, d\lambda = \int fh \, d\mu + \int f \, h^2 \, d\lambda = \int fh \, d\mu + \int f \, h^2 \, d\mu + \int f \, h^2 \, d\nu$$

$$= \ldots\ldots = \int f \, (h + h^2 + \ldots + h^n) \, d\mu + \int fh^n \, d\nu \quad \forall f \in L^1(\lambda)$$

In particolare, posto $f \equiv 1$ in $(**)$, vediamo che

$$\nu(X) \geq \int \left(\sum_n h^n \right) d\mu \quad \text{e quindi} \quad \sum_n h^n(x) < +\infty \quad \mu - q.o. \quad \mu(\{h = 1\}) = 0$$

Posto $\qquad \hat{h} := \sum_n h^n \in L^1(\mu) \qquad Z := \{h = 1\}$

e passando al limite in $(**)$ otteniamo

$$\int f\,d\nu = \int f\,\hat h\,d\mu + \int_{\{h=1\}} f\,d\nu \quad \forall f \in L^1(\lambda), \quad \nu(E) = \int_E \hat h\,d\mu + \nu(E \cap Z) \quad \forall E \in \Sigma$$

Sia infine $X = \cup_j E_j$, $E_j \in \Sigma$, $\mu(E_j) < +\infty$, E_j due a due disgiunti. Per quanto visto, ove $X = E_j$,

$$\exists \hat h_j = \hat h_j \chi_{E_j} \in L^1(\lambda), \quad Z_j \in \Sigma, \quad \mu(Z_j) = 0 \qquad \text{tali che}$$

$$\nu(E \cap E_j) = \int_E \hat h_j\,d\mu + \nu(E \cap Z_j) \quad \forall E \in \Sigma \qquad \text{e quindi}$$

$$\nu(E) = \nu(\cup_j (E \cap E_j)) = \sum_j \nu(E \cap E_j) = \int_E \hat h\,d\mu + \nu(E \cap (\cup_j Z_j)), \quad \hat h := \sum_j \hat h_j$$

Corollario. Sia $l \in (L^\infty)'$ tale che $f \ge 0 \Rightarrow l(f) \ge 0$, . Allora

$$\exists g \in L^1, g \ge 0 : \quad l(f) = l_g(f) := \int fg \quad \forall f \in L^\infty \;\Leftrightarrow\; (f_n \rightharpoonup^* 0 \;\Rightarrow\; l(f_n) \to 0)$$

Come osservato, l_g ha tale proprietá, e se l ha questa proprietá allora

$$l(f) = \int f\,d\nu_l, \quad \forall f \in L^\infty_\mu, \quad \nu_l(E) := l(\chi_E) \quad \forall E \in \Sigma_\mu$$

Infine, $\nu \prec\prec \mu \;\Rightarrow\; \exists g \in L^1_\mu : \int f\,d\nu_l = \int fg d\mu$.

Misure assolutamente continue misure singolari e Teorema di decomposizione di Lebesgue.

Siano μ, ν misure (σ-finita, finita) definite sulla σ-algebra $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$:

$\nu \prec\prec \mu$ (ν é **assolutamente continua** rispetto a μ) se $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$.

ν é **singolare** rispetto a μ ($\nu \perp \mu$) $\Leftrightarrow \exists Z \in \Sigma : \mu(Z) = 0, \nu(Z^c) = 0$

É vero che : $\exists\ \nu_{ac} \prec\prec \mu,\ \nu_s \perp \mu$ unicamente determinate : $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$

Che tale decomposizione esista segue dal Teorema di Radon-Nikodym:

$$\exists h \in L^1_\mu, \quad Z \in \Sigma, \quad \mu(Z) = 0 : \quad \nu(E) = \int_E h d\mu + \nu(Z \cap E) = \nu_{ac}(E) + \nu_s(E)$$

$$\nu_{ac}(E) := \int_E h d\mu, \qquad \nu_s(E) := \nu(Z \cap E)$$

L'unicitá é poi facile da verificare.

IL TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI RIESZ

Sia l funzionale lineare positivo su $C_0(\mathbf{R}^N)$: $l(\varphi) \geq 0$ se $\varphi \geq 0$. Allora

$\exists$ μ misura di Radon tale che $$l(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi d\mu \qquad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$$

Prova. Sia

$$\mu(\Omega) := \sup\{l(\varphi) : \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N),\ 0 \leq \varphi \leq 1,\ supp\, \varphi \subset \Omega\},\ \forall \Omega \subset \mathbf{R}^N,\ \text{aperto}$$

$$\mu(A) := \inf\{\mu(\Omega) : A \subset \Omega \subset \mathbf{R}^N,\ \Omega \text{ aperto}\}$$

Passo 1. μ é misura
Passo 2. μ é misura di Radon
Passo 3. $l(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$.

Prova passo 1. Siano $\Omega \subset \cup_j \Omega_j$ aperti, $K :=$ $supp\ \varphi \subset \Omega$. Siccome K é compatto, esiste n tale che $K \subset \cup_{j=1}^n \Omega_j$. Sia ψ_j partizione dell'unitá: $0 \leq \psi_j \leq 1$, $supp\, \psi_j \subset \Omega_j$, $\sum_{j=1}^n \psi_j \equiv 1$ su K. Allora

$$l(\varphi) = l(\sum_{j=1}^n \psi\, \psi_j) = \sum_{j=1}^n l(\psi \psi_j) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(\Omega_j) \qquad (\text{perché } supp\ \psi_j \subset \Omega_j)$$

e quindi $\mu(\Omega) \leq \sum_j \mu(\Omega_j)$. Ora, se $A \subset \cup_j A_j$ con $\sum_j \mu(A_j) < +\infty$ ed $\epsilon > 0$, siano $A_j \subset \Omega_j$ aperti e tali che $\mu(\Omega_j) \leq \mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$. Dunque

$$\mu(A) \leq \mu(\cup_j \Omega_j) \quad \sum_j \mu(\Omega_j) \leq \sum_{j\geq 1} \left[\mu(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}\right] = \epsilon + \sum_{j\geq 1} \mu(A_j) \quad \forall \epsilon$$

Prova passo 2. Proviamo che μ é misura metrica. Se $\Omega_i, i = 1,2$ sono aperti disgiunti e $supp\, \varphi_i \subset \Omega_i$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$ allora $supp\, [\varphi_1 + \varphi_2] \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ e $0 \leq \varphi_1 + \varphi_2 \leq 1$ e quindi

$$l(\varphi_1) + l(\varphi_2) = l(\varphi_1 + \varphi_2) \leq \mu(\Omega_1 \cap \Omega_2) \quad \text{e quindi} \quad \mu(\Omega_1) + \mu(\Omega_2) \leq \mu(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

Allora, se $d(A_1, A_2) > 0$, esistono Ω_i aperti disgiunti tali che $A_i \subset \Omega_j$ e quindi, se $A_1 \cup A_2 \subset \Omega$ aperto, risulta

$$\mu(\Omega) \geq \mu([\Omega \cap \Omega_1] \cup [\Omega \cap \Omega_2]) = \mu(\Omega \cap \Omega_1) + \mu(\Omega \cap \Omega_2) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

Passando all'inf: $\mu(A_1 \cup A_2) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2)$ e quindi μ é misura metrica e quindi boreliana. Infine , μ é di Radon: é Borel regolare, perché $\mu(A) = \mu(\cap \Omega_j)$

se $\mu(A) < +\infty, \mu(A) + \frac{1}{j} \geq \mu(\Omega_j)$ e $\mu(K) < +\infty$ se K é compatto. E ció segue subito dal fatto che, essendo l positivo, si ha che

$$\forall K \quad \text{compatto} \quad \exists c_K : \quad supp\ \varphi \subset K \quad \Rightarrow \quad |l(\varphi)| \leq c_K\ \|\varphi\|_\infty$$

Infatti, fissato Ω aperto limitato contenente K, sia $\psi \in C_0(\mathbf{R}^N)$ tale che $0 \leq \psi \leq 1$ con $supp\ \psi \subset \Omega$ e $\psi \equiv 1$ in K. Allora

$$\|\varphi\|_\infty\, \psi \geq \varphi \geq 0 \quad \Rightarrow \quad l(\varphi) \leq\ l(\|\varphi\|_\infty\, \psi) = \|\varphi\|_\infty\, l(\psi)$$

Siccome é anche $l(-\varphi) \leq \|\varphi\|_\infty\, l(\psi)$, concludiamo che $|l(\varphi)| \leq \|\varphi\|_\infty\, l(\psi)$.

Prova passo 3. Sia $K := supp\ \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$. Fissato $\epsilon > 0$, siano $t_0 < \inf\ \varphi < t_1 \ldots < t_n = \sup\ \varphi$ tali che $t_j - t_{j-1} < \epsilon \quad \forall j$ e siano

$$E_j := \varphi^{-1}(\,(t_{j-1}, t_j]\,) \subset \Omega_j : \quad \mu(\Omega_j) \leq \mu(E_j) + \frac{\epsilon}{n}, \quad \varphi(x) \leq t_j + \epsilon \quad \forall x \in \Omega_j, \quad \forall j$$

Notiamo che gli E_j sono disgiunti e $K = \cup_j E_j$. Sia ψ_j partizione dell'unitá: $0 \leq \psi_j \leq 1$, $supp\ \psi_j \subset \Omega_j$, $\sum_j \psi_j \equiv 1$ su K e quindi $\varphi \equiv \sum_j \varphi\ \psi_j$. Ora,

$$t_j - \epsilon < t_{j-1} < \varphi(x) \quad \forall x \in E_j, \quad \psi_j\, \varphi \leq (t_j + \epsilon)\, \psi_j \quad \Rightarrow$$

$$l(\varphi) = \sum_{j=1}^n l(\varphi\, \psi_j) \leq \sum_{j=1}^n (t_j + \epsilon) l(\psi_j) \leq \sum_{j=1}^n (t_j + \epsilon)\, \mu(\Omega_j) \leq \sum_{j=1}^n (t_j + \epsilon)\ \left[\mu(E_j) + \frac{\epsilon}{n}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^n (t_j + \epsilon)\mu(E_j) + \sum_{j=1}^n (t_j + \epsilon)\frac{\epsilon}{n} = \sum_{j=1}^n (t_j - \epsilon)\mu(E_j) + 2\epsilon\mu(K) + \epsilon(\sup\varphi + \epsilon) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \int_{E_j} \varphi\, d\mu + \epsilon[\,2\mu(K) + \sup\varphi + \epsilon\,] = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu + \epsilon[\,2\mu(K) + \sup\varphi + \epsilon\,]$$

Ma é anche $l(-\varphi) \leq \int_{\mathbf{R}^N} [-\varphi]\, d\mu$, e quindi $l(\varphi) = \int \varphi\, d\mu$.

NOTA. Esattamente come per la misura di Lebesgue si vede che

$$\forall E \quad \text{boreliano} \qquad \mu(E) = \sup\{\mu(K) : \quad K \subset E, \quad K \quad \text{compatto}\}$$

Ció comporta l'**unicitá di** μ: se $l(\varphi) = \int \varphi d\nu = \int \varphi d\nu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$, allora, dato un compatto K e preso un aperto Ω contenente K e tale che $\nu(K) + \epsilon \geq \nu(\Omega)$, e presa una $\varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$ tale che $0 \leq \varphi \leq 1$, $supp\, \varphi \subset \Omega, \varphi \equiv 1$ su K si ha

$$\mu(K) = \int_K d\mu \leq \varphi d\mu = l(\varphi) = \int_K d\nu \leq \nu(\Omega) \leq \nu(K) + \epsilon$$

Convergenza debole e compattezza per misure di Radon

Definizione. Siano μ_n misure di Radon in $\mathbf{R}^N$. Diremo che

$\mu_n \rightharpoonup \mu$ (converge debolmente a μ) se $\int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu_n \to \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$

Esempio. (i) Siano $0 \le f_n,\ f_n \in L^1(\mathbf{R}^N)$, $\mu_n(E) := \int\limits_E f_n dx$, E boreliano. Allora $f_n \rightharpoonup f$ in $L^1(\mathbf{R}^N)$ $\Leftrightarrow$ $\mu_n \rightharpoonup \mu$, $\mu(E) := \int\limits_E f dx.$

(ii) Sia $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $\int |f| = 1$, $f_n(x) := n^N |f(nx)|$, $\mu_n(E) := \int\limits_{\mathbf{R}^N} f_n dx.$ Allora $\mu_n \rightharpoonup \delta_0$, ove $\delta_0(E) = 1$ se $0 \in E$ e $\delta_0(E) = 1$ se $0 \notin E$.

Teorema Siano μ_n misure di Radon.

Se $\sup_n \mu(K) < +\infty \quad \forall K \subset \mathbf{R}^N$, allora $\exists n_k, \mu : \quad \mu_{n_k} \rightharpoonup_k \mu$

Prova. Dall'ipotesi segue che

$$\forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N), \qquad \sup_n \Big| \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu_n \Big| \quad < \quad +\infty$$

L'argomento diagonale di Cantor assicura che, se $D \subset C_0(\mathbf{R}^N)$ é numerabile, allora $\exists \mu_{n_k} : \quad l(\varphi) := \lim_k \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu_{n_k}$ esiste finito $\forall \varphi \in < D >$

e, ovviamente, l é lineare e positivo e quindi

$$\forall R > 0, \quad \exists c_R : \qquad |l(\varphi)| \quad \le \quad c_R\ \|\varphi\|_\infty \quad \forall \varphi \in C_0(B_R)$$

Ció implica che, se $\varphi_n \in C_0(B_R) \cap < D >$, $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to_n 0$ allora

$\lim_n l(\varphi_n)$ esiste finito e dipende solo da φ, ovvero l si estende a un funzionale lineare e positivo su

$$\{\varphi \in C_0(\mathbf{R}^N) : \quad \exists R > 0, \quad \exists \varphi_n \in < D > \quad \text{tale che} \quad \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to_n 0\}$$

Siccome (Teorema di Weierstrass)

$$\forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N), \quad \exists R > 0, \quad \exists \varphi_n \in < D > \quad \text{tale che} \quad \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to_n 0$$

concludiamo, in virtú del Teorema di Riesz, che esiste una misura di Radon μ tale che $\int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu_n \to_n \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu \quad \forall \varphi \in < D >$. Da ció segue facilmente che la convergenza ha infatti luogo su tutto $C_0(\mathbf{R}^N)$.

AM5: Esercizi e problemi- VI Settimana

Esercizio 1. Provare che l^∞ non é separabile.
Trovare una successione $l_n \in (l^\infty)'$ limitata, che non ha estratte debole* convergenti.

Esercizio 2. Sia $c_0 := \{x \in l^\infty : \quad x(j) \to_j 0\}$.

(i) Provare che c_0 é sottospazio lineare chiuso di l^∞ e che

$$\forall a \ \in l^\infty, \quad \exists a_n \in c_0 : \qquad a_n \rightharpoonup^\star a$$

(non é in particolare vero che $x_n \in C \subset l^\infty$ chiuso e convesso, $x_n \rightharpoonup^\star x$ in l^∞ $\Rightarrow$ $x \in C$).

(ii) Sia $h \in l^1$. Posto $l_h(x) := \int_{\mathbf{N}} h\, x = \sum_j h(j)\, x(j) \quad \forall x \in c_0$, provare che $Lh := l_h$ é una isometria lineare suriettiva di l^1 su $(c_0)'$ (l^1 é il duale di c_0...ma c_0 non é il duale di l^1!).

(iii) Mostrare con un esempio che non tutte le successioni limitate in c_0 hanno estratte debolmente convergenti.

Esercizio 3. Provare che

$$x_n \in l^1, \quad x_n \rightharpoonup_n x \quad \Rightarrow \quad \|x_n - x\|_1 \to_n 0$$

Esercizio 4. Sia f misurabile. Provare che

(i) $\sup_{p \geq 1} \|f\|_p < +\infty \quad \Rightarrow \quad f \in L^\infty$

(ii) $f \in L^1 \cap L^\infty \quad \Rightarrow \quad f \in L^p \quad \forall p > 1$ e $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$

Esercizio 5. Sia $l(\varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\nu$, ν misura di Radon.

Supponiamo che l si prolunghi a tutto $L^\infty(\mathbf{R}^N, dx)$ in un funzionale della forma $\int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, f\, dx$ con $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$.

Provare che ν é assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.

CENNI DI SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia $A := \{x : \mathbf{N} \to \{0,1\}\} = 2^{\mathbf{N}}$. Come noto, A non é numerabile (ha la potenza del continuo). Siccome

$$x, y \in A, \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad \|x - y\|_\infty = 1$$

esiste in l^∞ una famiglia non numerabile di palle disgiunte: un insieme denso in l^∞ , dovendo intersecare ciascuna di tali palle, non puó dunque essere numerabile.

Sia $l_n(x) := x(n) \quad \forall x \in l^\infty$. É

$$|l_n(x)| = |x(n)| \leq \sup_j |x(j)| = \|x\|_\infty \quad \text{e quindi} \quad \|l_n\| = 1$$

(infatti, se $e_n(j) := 0$ se $j \neq n$ e $e_n(n) := 1$, allora $l_n(e_n) = 1$).
Siccome $l_{n_k} \rightharpoonup^\star l \quad \Leftrightarrow \quad x(n_k) = l_{n_k}(x) \to l(x)$ implica, in particolare, che $x(n_k)$ converge, tale l non puó esistere perché, quale che sia la selezione n_k esiste una successione limitata x tale che la $k \to x(n_k)$ non converga.

Esercizio 2. (i) Chiaramente,

$$x_n(j) \to_j 0 \quad \forall n, \quad \sup_j |x_n(j) - x(j)| \to_n 0 \quad \Rightarrow$$

$$|x(j)| \quad \leq \quad |x(j) - x_n(j)| + |x_n(j)| \quad \leq \quad 2\epsilon$$

se $n = n_\epsilon$ é abbastanza grande e $j \geq j(n_\epsilon)$, ovvero $x \in c_0$ e quindi c_0 é chiuso in l^∞.

Ricordiamo qui che, pensato $\mathbf{N}$ munito della misura che conta, i corrispondenti L^p si indicano l^p. In particolare, l^∞ é il duale di l^1:

$$\forall\, h \in l^\infty, \quad l_h(x) := \int_{\mathbf{N}} h\, x = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)\, x(j) \quad \forall x \in l^1, \quad e \quad Lh := l_h$$

é isometria lineare suriettiva di l^∞ su $(l^1)'$. Esempio: se $b_n := \chi_{\{1,\dots,n\}}$, $b_n \in c_0$ e $l_{b_n}(x) := \int_{\mathbf{N}} b_n\, x = \sum_{j=1}^{n} x(j) \quad \forall x \in l^1$. Si ha $l_{b_n}(x) \to_n \sum_{j=1}^{\infty} x(j) = \int_{\mathbf{N}} x = l_{\chi_{\mathbf{N}}}$ ovvero $b_n \rightharpoonup^\star \chi_{\mathbf{N}} \notin c_0$. Piú in generale, $\forall a \in \mathbf{N}$ e posto $a_n := a\, b_n$, risulta

$$l_{a_n}(x) = \sum_j x(j)\, a_n(j) = \sum_{j=1}^{n} x(j)\, a(j) \to_n \sum_{j=1}^{\infty} x(j)\, a(j) = l_a(x) \quad \forall x \in l^1$$

ovvero $\quad a_n \rightharpoonup^\star a$ in l^∞.

(ii) Se, per $h \in l^1$, $Lh := l_h$, $l_h(x) := \sum_j h(j)\, x(j)$, Lh é funzionale lineare e continuo su l^∞ e quindi anche su c_0 con $\|l_h\| = \|h\|_1$ perché $|l_h(x)| \le \|x\|_\infty \sum_j |h(j)|$ e, viceversa, posto $x_n(j) := sign\, h(j)\, b_n(j)$ risulta $x_n \in c_0$, $\|x_n\|_\infty = 1$ e quindi $\|l_h\| \ge l_h(x_n) = \sum_{j=1}^n |h(j)| \quad \forall n$.

Suriettivitá di L. Sia $l \in (c_0)'$ e , posto $e_n := \chi_{\{n\}} \in c_0$, sia $h := (l(e_j))_{j\in\mathbf{N}}$. Intanto, $h \in l^1$, perché $\sum\limits_{j=1}^n |h(j)| =$

$$l(\sum_{j=1}^n sign\ h(j)\, e_j) \le \|l\|\ \|\sum_{j=1}^n sign\ h(j)\, e_j\|_\infty \le \|l\| \ \Rightarrow\ \sum_{j=1}^\infty |h(j)| \le \|l\| < \infty$$

Infine $\quad \|x - b_n\, x\|_\infty = \sup\limits_{j \ge n+1} |x(j)| \to_n 0 \quad \forall x \in c_0 \quad \Rightarrow$

$$l(x) = \lim_n l(x\, b_n) = \lim_n [\sum_{j=1}^n l(x(j) e_j) = \sum_{j=1}^\infty x(j)\, l(e_j) = l_h(x)$$

(iii) Come in (ii): $b_n := \chi_{\{1,\dots,n\}} \rightharpoonup^\star \chi_{\mathbf{N}} \notin c_0$. In particolare, $l_{b_n}(e_j) \to_n 1 \quad \forall j$.

Esercizio 3. Per assurdo (passando eventualmente ad una sottosuccessione)

$\exists x_n \rightharpoonup 0$ in l^1 tale che $\|x_n\|_1 \ge \delta > 0$, e quindi, sostituendo x_n con $\frac{x_n}{\|x_n\|_1}$

$$\exists x_n \rightharpoonup 0 \quad \text{con} \quad \|x_n\|_1 = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Da $x_n \rightharpoonup 0$ ovvero $\sum\limits_j x_n(j)\, a(j) \to_n 0 \quad \forall a \in l^\infty$ segue, prendendo $a = \chi_{\{i\}}$,

$$x_n(i) \to_n 0 \quad \forall i \in \mathbf{N}$$

Quindi, per ogni fissato $m \in \mathbf{N}$, $\quad \sum\limits_{j>m} |x_n(j)| > \frac{3}{4} \quad \forall n \ge n_m$

Siano poi $k_1 < l_1$ tali che $\sum\limits_{j=k_1}^{l_1} |x_1(j)| \ge \frac{3}{4}$.

Detto $n_1 = 1$, sia n_2 tale che se $k_2 > l_1$ ed $l_2 > k_2$ é abbastanza grande risulti

$$\sum_{j=k_2}^{l_2} |x_{n_2}(j)| \ge \frac{3}{4}$$

Iterando, si costruisce una sottosuccessione x_{n_i} tale che, se $k_i > l_{i-1}$ ed l_i é abbastanza grande risulti

$$\forall i \in \mathbf{N} : \qquad \sum_{j=k_i}^{l_i} |x_{n_i}(j)| \ \ge\ \frac{3}{4} \quad \text{e quindi} \quad \sum_{j<k_i} |x_{n_i}(j)| + \sum_{j>l_i} |x_{n_i}(j)| \le \frac{1}{4}$$

Se $\quad a(j) = \ sign \ x_{n_i}(j) \ \forall j = k_i, \ldots, l_i,$ é $\quad a \in l^\infty$ e quindi $\quad \sum_j x_{n_i}(j)\, a(j) \to_i 0$

mentre $\quad \displaystyle\sum_j x_{n_i}(j)\, a(j) \geq \sum_{j=k_i}^{l_i} |x_{n_i}(j)| - \left[\sum_{j<k_i} |x_{n_i}(j)| + \sum_{j>l_i} |x_{n_i}(j)|\right] \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

contraddizione.

Esercizio 4. (i) Sia $\mu(\{x : \ |f(x)| \geq c\}) > 0$. Allora

$$\sup_{p\geq 1}(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} \geq (\int_{\{x:\ |f(x)|\geq c\}} |f|^p)^{\frac{1}{p}} \geq c\mu(\{x :\ |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} \ \Rightarrow \ \sup_{p\geq 1}(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} \geq$$

$$\geq c \limsup_{p\to+\infty} \mu(\{x : \quad |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} = c \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x : \quad |f(x)| \geq c\}) = 0$$

se $c > \sup_{p\geq 1}(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$ e quindi $\quad \|f\|_\infty \leq \sup_{p\geq 1}(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$

(ii) $\quad p > 1 \quad \Rightarrow \quad \int |f|^p = \int |f| \ |f|^{p-1} \leq \|f\|_1 \ \|f\|_\infty^{p-1}$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_p \leq \|f\|_1^{\frac{1}{p}} \ \|f\|_\infty^{\frac{p-1}{p}} \quad \Rightarrow \quad \limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$$

Poi, $\quad c < \|f\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x : \quad |f(x)| \geq c\}) > 0$ ed allora

$$\|f\|_p \geq c\, \mu(\{x :\ |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} \ \Rightarrow \ \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq c \ \Rightarrow \ \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$$

Esercizio 5. $\quad l(\varphi) := \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\nu, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ é
funzionale lineare e continuo su $C_0(\mathbf{R}^N)$, sottospazio lineare di $L^\infty(\mathbf{R}^N, dx)$

(dx indichi la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$; notiamo che nella classe delle funzioni uguali q.o. a una $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N), \varphi$ é l'unico rappresentante continuo).

Per Hahn-Banach, l ha un prolungamento lineare e continuo su tutto $L^\infty(\mathbf{R}^N, dx)$.

Supponiamo esista $\quad g \in L^1 : \quad l(f) = \int gf, \quad \forall f \in L^\infty.$ Allora, se E boreliano di misura (di Lebesgue) nulla, si ha che

χ_E é limite q.o. di una successione $\quad \varphi_n \in C_0(\mathbf{R}^N)$, con $\chi_E \leq \varphi_n(x) \leq 1 \quad \forall x$
e quindi

$$l(\varphi_n) = \int \varphi_n\, g \to_n \int \chi_E\, g = 0$$

(per il Teorema di Lebesgue).Ció implica

$$\int \chi_E\, d\nu \leq \underline{\lim}_n \int \varphi_n\, d\nu = \underline{\lim}_n l(\varphi_n) = \underline{\lim}_n \int \varphi_n\, g = 0$$