AM5: Tracce delle lezioni- V Settimana

SPAZI L^p: COMPATTEZZA DEBOLE E DUALITÁ

Sia μ misura su X, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $\|.\|_p$ indicherá la norma in $L^p(X, \mu)$.

Definizione di convergenza debole in L^p. Sia $f_n \in L^p$:

$$f_n \rightharpoonup_n f \qquad \Leftrightarrow \qquad \int f_n\, g\, d\mu \to \int f\, g\, d\mu \quad \forall\ g \in L^q$$

Uniforme limitatezza. $f_n \rightharpoonup_n f$ in $L^p \quad \Rightarrow \quad \sup_n \|f_n\|_p < +\infty$

Prova. Sostituendo $f_n - f$ ad f_n, possiamo supporre $f = 0$. Per assurdo (eventualmente passando ad una sottosuccessione), sia $\|f_n\|_p \geq 4^n$. Si ha

$$h_n := 4^n \frac{f_n}{\|f_n\|_p}, \qquad \|h_n\|_p = 4^n, \qquad \int h_n\, g \to_n 0 \quad \forall g \in L^q$$

$$g_n := \frac{|h_n|^{p-2} h_n}{\|h_n\|_p^{p-1}}, \qquad \int |g_n|^q = 1, \qquad \int h_n g_n = \|h_n\|_p = 4^n$$

Se

$$\sigma_1 := 1, \quad \sigma_n := sign\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{3^j} \int h_n\, g_j\right) \quad \text{é} \quad \|\sum_n^{n+m} \frac{\sigma_j}{3^j} g_j\|_q \leq \sum_n^{n+m} \frac{1}{3^j} \to_n 0\ \forall m$$

e quindi, se $\hat{g} := \sum_1^\infty \frac{\sigma_j}{3^j} g_j \in L^q$, é $|\int h_n\, \hat{g}| =$

$$= |\sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j}{3^j} \int h_n g_j + \sum_{j>n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int h_n g_j| \quad \geq \quad \left| |\sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j}{3^j} \int h_n\, g_j| - |\sum_{j>n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int h_n\, g_j| \right|$$

Ora, $|\sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j}{3^j} \int h_n g_j| = |\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{3^j} \int h_n g_j + \frac{\sigma_n}{3^n} \int h_n g_n| \geq (\frac{1}{3})^n \int h_n g_n = (\frac{4}{3})^n$,

mentre $|\sum_{j>n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int h_n g_j| \leq \sum_{j>n} \frac{4^n}{3^j} = \frac{1}{2}(\frac{4}{3})^n$ e quindi $|\int h_n \hat{g}| \geq \frac{1}{2}(\frac{4}{3})^n \to +\infty$,

contraddizione.

Proposizione.

(i) $\|f_n - f\|_p \to_n 0 \quad \Rightarrow \quad f_n \rightharpoonup_n f$ in L^p (ma non viceversa)

(ii) $f_n \rightharpoonup_n f,\ g_n \rightharpoonup_n g,\quad$ in $L^p,\ \alpha,\beta \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha f_n + \beta g_n \rightharpoonup_n \alpha f + \beta g$ in L^p

(iii) $f_n \rightharpoonup_n f$ in $L^p \quad \Rightarrow \quad \liminf \|f_n\|_p \geq \|f\|_p$

(iv) $f_n \rightharpoonup_n f$ in L^p, $g_n \to g$ in $L^q \quad \Rightarrow \quad \int f_n\, g_n \to_n \int f\, g$

(v) $\overline{< g_i >} = L^q,\ \int f_n\, g_j \to_n 0 \quad \forall j,\ \sup_n \|f_n\|_p < +\infty \quad \Rightarrow \quad f_n \rightharpoonup_n 0$ in L^p

Prova. (i) $|\int (f_n - f)\, g| \leq \|f_n - f\|_p\, \|g\|_q \to_n 0 \quad \forall\, g \in L^q$ (ii) ovvia

(iii) $|\int f_n\, g| \leq \|f_n\|_p\, \|g\|_q \;\Rightarrow\; |\int f\, g| \leq (\liminf_n \|f_n\|_p)\, \|g\|_q \quad \forall\, g \in L^q \;\Rightarrow$

$$\int |f|^p = |\int f\,(|f|^{p-2}\, f)| \leq \liminf_n \|f_n\|_p\, \|\, |f|^{p-1}\,\|_q = \liminf_n \|f_n\|_p\, (\int |f|^p)^{\frac{1}{q}}$$

(iv) $\sup_n \|f_n|_p < +\infty \;\Rightarrow$

$$|\int (f_n g_n - f\, g)| \leq |\int (f_n - f) g| + |\int (g_n - g) f_n| \leq |\int (f_n - f) g| + \|f_n\|_p \|g_n - g\|_q \to_n 0$$

(v) É $\int f_n\, g \to_n 0 \quad \forall g \in < g_j >$. Dato $g \in L^q$, siano $h_j \in < g_j >$ tali che $\|h_j - g\|_q \to_j 0$. Allora

$$|\int f_n g| \leq |\int f_n h_j| + \int |f_n||h_j - g| \quad \Rightarrow \quad \limsup_n |\int f_n g| \leq \|h_j - g\|_q \sup_n \|f_n\|_p \quad \forall j$$

e quindi $\limsup_n |\int f_n\, g| = 0$.

DISEGUAGLIANZA DI HANNER

$$1 \leq p \leq 2 \quad \Rightarrow \quad (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\,\|f\|_p - \|g\|_p\,|^p \leq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \quad \forall f, g \in L^p$$
$$p \geq 2 \quad \Rightarrow \quad (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\,\|f\|_p - \|g\|_p\,|^p \geq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \quad \forall f, g \in L^p$$

NOTA. Scrivendo $\varphi := f + g,\ \psi := f - g$, e quindi $f = \frac{\varphi + \psi}{2},\quad g = \frac{\varphi - \psi}{2}$, le diseguaglianze si riscrivono nel modo equivalente

$$1 \leq p \leq 2 \;\Rightarrow\; (\|f + g\|_p + \|f - g\|_p)^p + |\,\|f + g\|_p - \|f - g\|_p\,|^p \leq 2^p \left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)$$

$$p \geq 2 \;\Rightarrow\; (\|f + g\|_p + \|f - g\|_p)^p + |\,\|f + g\|_p - \|f - g\|_p\,|^p \geq 2^p \left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)$$

In particolare, se $p = 2$ ritroviamo la regola del parallelogramma, mentre se $p = 1$ si tratta di due modi di scrivere la diseguaglianza triangolare.

Prova. Siccome la diseguaglianza é simmetrica in f, g, e certamente vera se $\|f\|_p\ \|g\|_p = 0$, possiamo supporre $\|f\|_p \geq \|g\|_p > 0$. Dividendo per $\|f\|_p^p$, ed avendo posto $\hat{f} := \frac{f}{\|f\|_p}$, $\hat{g} := \frac{g}{\|f\|_p}$ la diseguaglianza si riscrive,

$$(*)\quad p \in [1,2]: \quad \|\hat{f}\|_p = 1, \|\hat{g}\|_p \leq 1 \ \Rightarrow\ (1+\|\hat{g}\|_p)^p + (1-\|\hat{g}\|_p)^p \leq \|\hat{f}+\hat{g}\|_p^p + \|\hat{f}-\hat{g}\|_p^p$$

$$(**)\quad p \geq 2: \quad \|\hat{f}\|_p = 1, \|\hat{g}\|_p \leq 1 \ \Rightarrow\ (1+\|\hat{g}\|_p)^p + (1-\|\hat{g}\|_p)^p \geq \|\hat{f}+\hat{g}\|_p^p + \|\hat{f}-\hat{g}\|_p^p$$

Ora, $(*), (**)$ si possono derivare da

Una diseguaglianza elementare.

$$(\bullet)\quad 1 < p < 2 \quad \Rightarrow \quad a(r)|t|^p + b(r)|s|^p \leq |t+s|^p + |t-s|^p \quad \forall s, t \in \mathbf{R}, r \in (0,1]$$

$$(\bullet\bullet)\quad 2 < p \quad \Rightarrow \quad a(r)|t|^p + b(r)|s|^p \geq |t+s|^p + |t-s|^p \quad \forall s, t \in \mathbf{R}, r \in (0,1]$$

ove $a(r) := (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}$, $b(r) := r^{1-p}\,[(1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}]$.

Proviamo che $(\bullet) \Rightarrow (*)$ (e $(\bullet\bullet) \Rightarrow (**)$). Da

$$(1+r)^p + (1-r)^p = [(1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}] + r^p\, r^{1-p}[(1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}] =$$

$$= a(r) + b(r) r^p$$ segue, posto $r = \|\hat{g}\|_p$,

$$(1+\|\hat{g}\|_p)^p + (1-\|\hat{g}\|_p)^p = \int a(r)|\hat{f}(x)|^p + b(r)|\hat{g}(x)|^p \qquad \text{perché} \qquad \int |\hat{f}|^p = 1.$$

Quindi, posto $t = \hat{f}(x)$, $s = \hat{g}(x)$, in $(\bullet)$, otteniamo $(*)$.

Prova di $(\bullet), (\bullet\bullet)$. Intanto, sono vere per $t = 0$: $\forall r > 0$ si ha

$$b'(r) = \frac{p-1}{r^p}\,[\,(1-r)^{p-2} - (1+r)^{p-2}\,] > 0 \quad \text{se} \quad p < 2 \quad \text{e} \quad b'(r) < 0 \quad \text{se} \quad p > 2$$

Siccome $b(1) = 2^{p-1} < 2$ se $p < 2$ e $b(1) > 2$ se $p > 2$, si ha quindi che $1 < p < 2 \ \Rightarrow\ b(r) < 2$ in $(0,1]$ mentre $p > 2 \ \Rightarrow\ b(r) > 2$ in $(0,1]$. Ovvero, $(\bullet)$ e $((\bullet\bullet))$ valgono per $t = 0$ e si possono dunque riscrivere, dividendo per $|t|^p$, nella forma equivalente

$$(\bullet)\quad 1 < p < 2 \quad \Rightarrow \quad a(r) + b(r)|\tau|^p \leq |1+\tau|^p + |1-\tau|^p \quad \forall \tau \in \mathbf{R}$$

$$(\bullet\bullet)\quad p > 2 \quad \Rightarrow \quad a(r) + b(r)|\tau|^p \geq |1+\tau|^p + |1-\tau|^p \quad \forall \tau \in \mathbf{R}$$

che infatti basta provare per ogni $\tau \geq 0$, perché la diseguaglianza é pari in τ.

Posto $\quad \gamma(r,\tau) := a(r) + b(r)\tau^p, \quad r \in (0,1], \tau \geq 0$, basta provare che

$$1 < p < 2 \quad \Rightarrow \quad \sup_{0<r\leq 1} \gamma(r,\tau) = |1+\tau|^p + |1-\tau|^p \quad \forall \tau \geq 0$$

$$p > 2 \quad \Rightarrow \quad \inf_{0<r\leq 1} \gamma(r,\tau) = |1+\tau|^p + |1-\tau|^p \quad \forall \tau \geq 0$$

É $\quad a'(r) = (p-1)[(1+r)^{p-2} - (1-r)^{p-2}], \quad b'(r) = -\dfrac{a'(r)}{r^p}, \quad \gamma'(r) = a'(r)[1 - (\dfrac{\tau}{r})^p]$

$$a' < 0, \quad b' > 0 \quad \text{se} \quad p < 2 \quad \text{e} \quad a' > 0, \quad b' < 0 \quad \text{se} \quad p > 2 \quad \forall r > 0$$

In particolare, γ' si annulla esattamente in $r = \tau$, e $\gamma(\tau) = |1+\tau|^p + |1-\tau|^p$ é un massimo se $p < 2$ ed un minimo se $p > 2$. Quindi

$$\tau \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad (\bullet), (\bullet\bullet) \qquad \text{valgono}$$

Sia infine $\tau > 1$. Per quanto visto, se $\quad p < 2 \quad \delta := \frac{1}{\tau} < 1$ e $r \in (0,1]$ allora

$$a(r) + b(r)\delta^p \leq (1+\delta)^p + (1-\delta)^p \qquad \text{e quindi} \qquad \tau^p a(r) + b(r) \leq (1+\tau)^p + (1-\tau)^p$$

e vale la diseguaglianza opposta se $p > 2$. Basta allora provare che $\quad \forall r \in (0,1]$

$$a(r) + b(r)\tau^p \leq a(r)\tau^p + b(r) \quad \text{se} \quad p < 2$$

$$a(r) + b(r)\tau^p \geq a(r)\tau^p + b(r) \quad \text{se} \quad p > 2$$

E ció segue dal fatto che $\quad p < 2 \quad \Rightarrow \quad a' - b' = a'(1 + \frac{1}{r^p}) < 0$ in $(0,1]$ $\quad$ e quindi

$$a(1) = b(1) = 2^{p-1} \quad \Rightarrow \quad a(r) \geq b(r) \quad \forall r \in (0,1] \quad \Rightarrow \quad [a(r) - b(r)]\,\tau^p \geq a(r) - b(r)$$

$$\Rightarrow \quad a(r) + \tau^p b(r) \leq \tau^p\, a(r) + b(r)$$

Se invece $p > 2$, é $a' - b' > 0$ in $(0,1]$, e quindi si ottiene la diseguaglianza opposta.

Proiezione su un convesso. Sia $1 < p, \qquad C \subset L^p \qquad$ chiuso e convesso.

Allora $\qquad \forall f \in L^p, \quad \exists f_C \in C : \quad \|f - f_C\| \leq \|f - g\| \quad \forall g \in C$

Inoltre $\qquad 0 \leq \displaystyle\int |f - f_C|^{p-2}(f - f_C)(f_C - v) \quad \forall v \in C$

Prova. Sia $f_n \in C$ minimizzante: $\quad \|f_n - f\| \to_n d := \inf_{g\in C} \|f - g\|$. $\quad$ Se f_n é di Cauchy, $\quad \exists\, f_C \in C = \overline{C}$ tale che $\|f_n - f_C\| \to_n 0$ e quindi $\quad \|f - f_C\| = d$.

Hanner $\qquad\Rightarrow\qquad$ f_n **é di Cauchy.**

Caso $p>2$**.** Utilizziamo la versione in Nota, con $f_n-f_m, \quad f_n+f_m-2f$ al posto di $f,\ g$: fissato $\epsilon>0$, $\exists n_\epsilon$ tale che

$$n,m\geq n_\epsilon \quad\Rightarrow\quad 2^p\left[\ \|f_n-f_m\|_p^p+\|f_n+f_m-2f\|_p^p\ \right]\leq$$

$(\|2(f_n-f)\|_p+\|2(f_m-f)\|_p)^p+|\ \|2(f_n-f)\|_p-\|2(f_m-f)\|_p|^p\leq(4d)^p+\epsilon$. Ma C convesso $\Rightarrow \frac{f_n+f_m}{2}\in C \quad\Rightarrow\quad \|f_n+f_m-2f\|_p=2\|\frac{f_n+f_m}{2}-f\|\geq 2d \quad\Rightarrow$

$$2^p\ [\ \|f_n-f_m\|_p^p+(2d)^p]\ \leq\ 2^p\left[\ \|f_n-f_m\|_p^p+\|f_n+f_m-2f\|_p^p\ \right]\leq(4d)^p+\epsilon$$

$$\Rightarrow\quad 2^p\ \|f_n-f_m\|_p^p\leq\epsilon \qquad \text{se}\quad n,m\geq n_\epsilon$$

Caso $1<p<2$**.** Utilizziamo la versione in Nota, con $f_n-f, \quad f_m-f$ al posto di $f,\ g$: fissato $\epsilon>0$, $\exists n_\epsilon$ tale che $n,m\geq n_\epsilon \quad\Rightarrow$

$$(\|f_n-f_m\|_p+\|f_n+f_m-2f\|_p)^p+|\ \|f_n-f_m\|_p-\|f_n+f_m-2f\|_p|^p\leq$$

$$\leq\|2(f_n-f)\|_p^p+\|2(f_m-f)\|_p^p\leq 2^{p+1}d^p+2^p\,d^p\epsilon$$

Allora, dividendo per $(2d)^p$ e giacché $\|f_n+f_m-2f\|_p\geq 2d$ otteniamo

$$1+p\tfrac{\|f_n-f_m\|_p}{2d}\leq\left[1+\tfrac{\|f_n-f_m\|_p}{2d}\right]^p\leq 2+\epsilon \quad \text{e quindi} \quad \tfrac{\|f_n-f_m\|_p}{2d}\leq\tfrac{1+\epsilon}{p}<1.$$

Quindi, $(2d+\|f_n-f_m\|_p)^p+(2d-\|f_n-f_m\|_p)^p\leq 2^{p+1}d^p+2^p\,d^p\epsilon$ e quindi, dividendo per $(2d)^p$, e posto $\phi(t):=\frac{(1+t)^p+(1-t)^p}{2}$ si ha $\phi(\frac{\|f_n-f_m\|_p}{2d})\leq 1+\epsilon$.

Ma $\phi'(t)>0\ \forall t\in(0,1]$ e quindi $\frac{\|f_n-f_m\|_p^2}{4d^2}\leq\phi^{-1}(1+\epsilon)\to_{\epsilon\to 0}0 \quad \forall n,m\geq n_\epsilon$.

Infine, $\varphi_v(t):=\int|f-[tv+(1-t)f_C)]|^p\geq\int|f-f_C|^p=\varphi_v(0) \quad \forall v\in C, \quad \forall t\in[0,1]$

$$\Rightarrow \qquad 0\leq\varphi_v'(0)=\int|f-f_C|^{p-2}(f-f_C)\,(f_C-v) \quad \forall v\in C.$$

Corollario . Sia $V=\overline{V}\subset L^p$ sottospazio lineare. Allora

$$\forall f\in L^p,\ \exists f_V\in V: \qquad \int|f-f_V|^{p-2}(f-f_V)v=0 \quad \forall v\in V \qquad \text{e} \quad \|f-f_V\|\leq\|f\|$$

Prova. C'é solo da provare la diseguaglianza:

$$\|f-f_V\|_p^p=\int|f-f_V|^{p-2}\,(f-f_V)^2=\int|f-f_V|^{p-2}\,(f-f_V)f\leq\|f-f_V\|_p^{\frac{p}{q}}\,\|f\|_p$$

Teorema (IL DUALE DI L^p é L^q)

Sia $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Allora $(L^p)'$ **é isometricamente isomorfo a** L^q.

Se $g\in L^q$, allora $l_g(f):=\int f\,g$ é definito in L^p per la diseguaglianza di Holder, ed é un funzionale lineare e continuo:

$$|l_g(f)|\le \|f\|_p\,\|g\|_q$$

Dunque, l'applicazione

$$T: g\to l_g, \qquad l_g(f):=\int f\,g, \qquad g\in L^q$$

manda, in modo lineare, L^q nel duale di L^p. Inoltre T **é una isometria**:

$$\|g\|_q=\|T(g)\| \qquad \text{ove} \qquad \|T(g)\|:=\sup_{\|f\|_p=1}|l_g(f)|=\sup_{\|f\|_p=1}|\int f\,g|$$

Infatti, in primo luogo, $\|T(g)\|\le\|g\|_q$. Poi,

$$\|\,|g|^{q-2}\,g\,\|_p^p=\int|\,|g|^{q-2}\,g\,|^p=\int|g|^q=\|g\|_q^q \qquad \text{e quindi}$$

$$\|T(g)\|\ \ge\ \frac{|l_g(|g|^{q-2}\ g)|}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}}=\frac{\int|g|^q}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}}=\|g\|_q^{q-\frac{q}{p}}=\|g\|_q$$

Infine, T **é suriettiva**:

$$\forall l\in(L^p)',\quad \exists!\ g=g_l\in L^q: \qquad l(f)\ =\int f\,g \quad \forall f\in L^p$$

Sia infatti $V:=Ker\ l$. Se $l\ne0$, V é sottospazio lineare chiuso proprio di L^p, e quindi esiste $h\in L^p:\ \ h\notin V$. Se $h_V\ne h$ é la sua proiezione su V, detta $g:=|h-h_V|^{p-2}(h-h_V)$, si ha che $g\in L^q$ e

$$\int g\,v\ =\ \int|h-h_V|^{p-2}\,(h-h_V)\,v\ =\ 0 \quad \forall v\in V, \qquad \int g\,h>0 \qquad \text{perché}$$

$\int g\,h=\int|h-h_V|^{p-2}(h-h_V)[(h-h_V)+h_V]=\int|h-h_V|^p$. Ora,

$$\forall f\in L^p:\quad l(f-\frac{l(f)}{l(h)}\,h)=0 \ \text{ e quindi }\ 0=\int g\,(f-\frac{l(f)}{l(h)}\,h)=\int g\,f-\frac{l(f)}{l(h)}\int g\,h$$

e quindi
$$l(f)=\int\left[\frac{l(h)}{\int\ g\,h}\ g\right]f$$

Teorema (compattezza debole)

$$\sup_n \|f_n\|_p < +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists f \in L^p, \;\; n_k \to_k +\infty : \quad f_{n_k} \rightharpoonup_k f$$

Prova. Sia u_n densa in L^p. É facile vedere (usando ad esempio il Teorema di Vitali) che $g_n := |u_n|^{p-2} u_n$ é denso in L^q.

Siccome $\sup_n |\int f_n g_j| < +\infty \quad \forall j$ e quindi, per ogni j, la successione numerica $n \to \int f_n g_j$ ha una estratta convergente, si puó estrarre da f_n (metodo diagonale di Cantor) una f_{n_k} tale che

$$l(g_j) := \lim_k \int f_{n_k} g_j \qquad \text{esiste finito} \quad \forall j$$

e quindi
$$l(g) := \lim_k \int f_{n_k} g \qquad \text{esiste finito} \quad \forall g \in < g_n >$$

Inoltre, l é chiaramente lineare su $< g_j >$, e $|l(g)| \leq (\sup_n \|f_n\|_p)\ \|g\|_q$ $\forall g \in < g_j >$. Dunque l si estende (in modo unico) a un funzionale lineare e continuo su tutto L^q, che continuiamo ad indicare l. Dal teorema di rappresentazione:

$$\exists f \in L^p : \qquad l(g) = \int f\, g \qquad \forall g \in L^q$$

Per quanto sopra,
$$\int f_{n_k} g_j \to_k l(g_j) = \int f g_j \quad \forall j$$

e ció é sufficente a garantire che $f_{n_k} \rightharpoonup_k f$.

Lemma di Mazur Sia C chiuso e convesso. Allora

$$f_n \in C, \quad f_n \rightharpoonup_n f \qquad \Rightarrow \qquad f \in C$$

Prova. Per assurdo: $f \notin C$, e quindi, indicata con f_C la sua proiezione su C, risulta

$$f \neq f_C \qquad \text{e} \qquad 0 \leq \int |f - f_C|^{p-2}(f - f_C)\,(f_C - v) \quad \forall v \in C$$

Quindi, preso $v = f_n$, si ha

$$0 < \int |f - f_C|^p = \int |f - f_C|^{p-2}(f - f_C) f - \int |f - f_C|^{p-2}(f - f_C) f_C \leq$$

$$\leq \int |f - f_C|^{p-2}(f - f_C) f - \int |f - f_C|^{p-2}(f - f_C)\, f_n \to_n 0$$

contraddizione.

AM5: Esercizi e problemi- V Settimana

Problema 1 . Provare che

$$L^p \quad \text{separabile} \quad , \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \quad \Rightarrow \quad L^q \quad \text{separabile}$$

e, piú in generale, se E é un Banach, allora

$$E' \quad \text{separabile} \qquad \Rightarrow \quad E \quad \text{separabile}$$

Provare con un esempio che l'implicazione E separabile $\Rightarrow$ E' separabile é falsa.

Suggerimento. Usare il 'fatto' seguente: se V é sottospazio chiuso proprio di E, allora esiste un $x' \in E'$, $x' \neq 0$ *tale che* $x'(x) = 0$ *per ogni* $x \in V$

Problema 2. Sia $p \geq 2$. Provare che $\|.\|_p$ é **uniformemente convessa**:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad \|f\|, \|g\| \leq 1 \quad \|f-g\|_p \geq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \|\frac{f+g}{2}\|_p \leq 1-\delta_\epsilon$$

Suggerimento: usare la diseguaglianza di Hanner

Problema 3. Sia $p \geq 2$. Provare che

$$f_n \rightharpoonup_n f, \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0$$

Suggerimento: usare la uniforme convessitá della norma

Esercizio 1 . Dare un esempio di L^p non separabile.

Esercizio 2. Sia $f_n \rightharpoonup_n f$ in L^p, $p > 1$.

(i) Provare con un esempio che f_n può non convergere in alcun punto, può non convergere in misura. Può accadere che f_n non abbia alcuna sottosuccessione convergente q.o.?

(ii)Provare che se $f_n(x) \to g(x)$ q.o. allora $g = f$ q.o.

(iii) Provare che se $\int |f_n|^p \to \int |f|^p$ allora f_n ha almeno una sottosuccesione convergente q.o. ad f.

Esercizio 3 Sia $1 < p$, $f_n \in L^p$ limitata: $\sup_n ||f_n||_p < +\infty$. Provare che

$f_n \to f$ q.o., oppure in misura, $\Rightarrow$ f_n converge a f debolmente.

Esercizio 4 Siano $f_n \in L^p$. Provare che

(i)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ in misura $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(ii)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ q.o. $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(iii)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ in $L^p, \Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(iv)$f_n \to f$ q.o., $f_n \to \overline{f}$ in $L^p, \Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(v)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ debolmente $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(vi)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ in misura $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(vii)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ q.o. $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

Esercizio 5 Sia $f \in L^p$. Provare che

(i) $\mu(\{x \in \mathbf{R}^n : |f|^p \geq t\}) \leq \frac{||f||_p^p}{t}$

(ii) $t^p \mu(\{x \in \mathbf{R}^n : |f(x)| \geq t\}) \to 0$ al tendere di t a 0 e a $+\infty$.

Provare con un esempio che tale condizione non garantisce l'appartenenza di f ad L^p.

Esercizio 6 Siano $f_n \in L^p \cap L^q$, $1 \leq q < p$.

(i) Provare che $\mu(X) < +\infty$, $\sup_n ||f_n||_p < +\infty$, $f_n \to f$, $q.o.$ $\Rightarrow$

$$\|f_n - f\|_q \to 0 \quad \forall q \in [1, p)$$

Provare con un controesempio che l'ipotesi $\mu(X) < +\infty$ é essenziale.

(ii) Stabilire se $\sup_n [\|f_n\|_p + \|f_n\|_q] < +\infty$, $f_n \to f$, $q.o.$ $\Rightarrow$

$$\|f_n - f\|_r \to 0 \quad \forall r \in (q, p)$$

CENNI DI SOLUZIONI

Problema 1 . Sia D denso in L^p. Sia $g \in L^q$. Allora

$$f := |g|^{q-2} g \in L^p \quad \Rightarrow \quad \exists f_n \in D : \quad f_n \to f \quad q.o. f_n \quad \text{equidominata in} \quad L^p$$

$$\Rightarrow \quad g_n := |f_n|^{p-2} f_n \to |f|^{p-2} f = g \quad \text{equidominata in} \quad L^q$$

$$\Rightarrow \quad \{|f|^{p-2} f : \quad f \in D\} \quad \text{é denso in} L^q$$

Sia E' separabile, $\{x'_n : \quad n \in \mathbf{N}\}$ denso in E'. Sia

$$x_n \in E : \qquad \|x_n\| = 1, \quad x'_n(x_n) \geq \frac{1}{2}\|x'_n\|. \qquad \text{Allora}$$

$$x'(x_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\|x'_n\| \leq x'_n(x_n) = x'_n(x_n) - x'(x_n) \leq \|x'_n - x'\| \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

$$\Rightarrow \quad \|x'\| \leq \|x' - x'_n\| + \|x'_n\| \leq 3\|x' - x'_n\| \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad x' = 0$$

Ció comporta che V, chiusura di $< x_n >$, é densa (altrimenti esisterebbe $x' \in E'$, non nullo che si annulla su V) e quindi anche l'insieme delle combinazioni lineari degli x_n e a coefficenti razionali (che é un insieme numerabile) é denso in E.

Un esempio é dato da l^1, che é separabile (le combinazioni lineari dei vettori $e_i, i \in \mathbf{N}, \ e_i(j) = \delta_{ij}$ sono dense in l^1) mentre il suo duale, che é l^∞, non é separabile: l'insieme $\{x_{ij} = e_i + e_j : \quad i, j \in \mathbf{N}\}$ é non numerabile e $i, j \neq l, m \quad \Rightarrow$ $\|x_{ij} - x_{l,m}\|_\infty = \sup_n |x_{ij}(n) - x_{l,m}(n)| = 1$ e quindi esiste una famiglia non numerabile di palle disgiunte; un insieme denso, dovendo intersecare ogni palla, é dunque necessariamente non numerabile.

Problema 2. Da Hanner (scriveremo $\|.\|_p = \|.\|$):

$$\|f\| = \|g\| = 1 \quad \Rightarrow \quad 2^p \geq \|f+g\|^p + \|f-g\|^p \quad \Rightarrow \quad \|\frac{f+g}{2}\|^p \leq 1 - \epsilon$$

se $\|\frac{f-g}{2}\|^p \geq \epsilon$. Ora, supponiamo esistano f_n, g_n con

$$\|f_n\|, \|g_n\| \leq 1 : \quad \|\frac{f_n - g_n}{2}\| \geq \delta \quad \text{e} \quad \|\frac{f_n + g_n}{2}\| \to 1$$

Intanto $\|f_n\|, \|g_n\| \to 1$, perché $\|f_n\| + \|g_n\| \leq r < 2 \quad \Rightarrow \quad \|\frac{f_n+g_n}{2}\| \leq \frac{r}{2} < 1$.

$$\text{Dunque} \qquad \|f_n - \frac{f_n}{\|f_n\|}\| \to 0, \quad \|g_n - \frac{g_n}{\|g_n\|}\| \to 0$$

ovvero $\quad f_n = \dfrac{f_n}{\|f_n\|} + z_n,\ \ z_n \to 0, \quad g_n = \dfrac{g_n}{\|g_n\|} + w_n,\ \ w_n \to 0.$ Ora,

$$\|\frac{f_n}{\|f_n\|} - \frac{g_n}{\|g_n\|}\| = \|f_n - g_n + (w_n - z_n)\| \geq 2\delta - [\|w_n\| + \|z_n\|] \quad \Rightarrow \quad \|\frac{\frac{f_n}{\|f_n\|} + \frac{g_n}{\|g_n\|}}{2}\| \geq 1 - \frac{\delta}{2}$$

mentre dovrebbe essere $\qquad \lim_n \|\dfrac{\frac{f_n}{\|f_n\|} + \frac{g_n}{\|g_n\|}}{2}\| = \lim_n \|\dfrac{f_n + g_n}{2}\| = 1$

Problema 3. Facilmente,

$$\frac{f_n}{\|f_n\|} \rightharpoonup \frac{f}{\|f\|} \quad \text{e} \quad \|\frac{f_n}{\|f_n\|} - \frac{f}{\|f\|}\|_p \to 0 \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0$$

Possiamo quindi supporre, ($f \neq 0$ e) dividendo per $\|f_n\|$, $\quad \|f_n\| = \|f\| = 1$.

Quindi $\qquad f_n \rightharpoonup f \quad \Rightarrow \quad \dfrac{f_n + f}{2} \rightharpoonup f \quad \Rightarrow \quad \liminf \|\dfrac{f_n + f}{2}\| \geq \|f\| = 1$

Dall'uniforme convessitá segue allora che $\quad \|f_n - f\|_p \to 0$.

Esercizio 1 . Sia X insieme non numerabile, dotato della misura che conta . Gli elementi di $L^p(X, \mu)$ dati da $\quad f = \chi_{\{x\}}, x \in X \quad$ hanno la proprietá

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad \|\chi_{\{x\}} - \chi_{\{y\}}\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$$

Dunque esiste in $L^p(X, \mu)$ un insieme non numerabile di palle disgiunte e quindi ogni insieme denso in $L^p(X, \mu)$, dovendo intersecare ognuna di queste palle, é necessariamente non numerabile.

Esercizio 3 $\quad |\int_E (f_n - f)\, g| \leq ||f_n - f||_p \int_E |g|^q)^{\frac{1}{q}}$. Segue quindi dal Teorema di Vitali.

Esercizio 4

(i) $\quad f_n \to f$ in misura $\quad \Rightarrow \quad \exists f_{n_k} \to f$ q.o. Passando eventualmente di nuovo ad una sottosuccessione possiamo supporre $\quad f_{n_k} \to \overline{f}$ q.o. $\quad$ Dunque $f = \overline{f}$ q.o.

(ii) $\quad$ come in (i)

(iii) $\quad$ segue da (i), perché $f_n \to \overline{f}$ in $L^p \quad \Rightarrow \quad f_n \to \overline{f}$ in misura

(iv) $\quad$ segue dal fatto che $f_n \to \overline{f}$ in $L^p \quad \Rightarrow \quad \exists f_{n_k} \to \overline{f}$ q.o.

(v) $\int f_n g \to \int fg$, $\int f_n g \to \int \overline{f} g \quad \forall g \in L^q \quad \Rightarrow \quad \int (f - \overline{f}) g = 0 \quad \forall g \in L^q \quad \Rightarrow \quad f - \overline{f} = 0$ q.o.

(vi)-(vii) $f_n \to f$ debolmente $\Rightarrow$ f_n limitata, fatto che, insieme a $f_n \to \overline{f}$ in misura oppure q.o. implica $f_n \to \overline{f}$ debolmente, e quindi $f = \overline{f}$ q.o. per (v)

Esercizio 5 $\int_{\{|f(x)|\geq t\}} |f|^p \geq t^p \mu(\{|f(x)| \geq t\})$ e $|f|^p \in L^1 \Rightarrow$

$$\mu(\{|f(x)| \geq t\}) \to_{t\to+\infty} \mu(\{|f(x)| = +\infty\}) = 0 \;\Rightarrow\; \int_{\{|f(x)|\geq t\}} |f|^p \to_{t\to+\infty} 0$$

Esercizio 6

(i) $\forall E$ misurabile, si ha

$$\int_E |f_n|^q \;\leq\; (\int_E |f_n|^p)^{\frac{q}{p}} \qquad (\,\mu(E)\,)^{1-\frac{q}{p}} \leq$$

$$\sup_n \;\|f_n\|_p^{\frac{q}{p}} \;\; (\mu(E)\,)^{1-\frac{q}{p}} \;\leq\; \epsilon \quad \text{se} \quad \mu(E) \;\leq\; \delta_\epsilon$$

Vista l'ipotesi $\mu(X) < \infty$, la tesi segue allora dal Teorema di Vitali.

Controesempio: se $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $f_n(x) := n^{-\frac{N}{p}} f(\frac{x}{n})$, allora

$$\int_{\mathbf{R}^N} |f_n|^p \;=\; \int_{\mathbf{R}^N} n^{-N} |f(\frac{x}{n})|^p dx \;=\; \int_{\mathbf{R}^N} |f|^p, \qquad f_n(x) \to_n 0 \quad \forall x$$

$$\int_{\mathbf{R}^N} |f_n|^q \;=\; \int_{\mathbf{R}^N} n^{N(1-\frac{q}{p})} \;|f|^q dx \to +\infty$$

(ii) se $r > q$, allora

$$\int_{\{x:|f_n(x)|\leq\epsilon\}} |f_n|^r \leq \int |f_n|^q \;|f_n|^{r-q} \leq \epsilon^{r-q} \sup_n [\int |f_n|^q \;]$$