AM5: Tracce delle lezioni- IV Settimana

L^2 e gli spazi di HILBERT

$\|f\|_2^2 \;=\; \int |f|^2 \;=\; < f, f >$ ove

$$< f, g > := \int fg \, d\mu, \qquad \forall \, f, g \in L^2$$

é un **prodotto scalare** (ovvero una **forma bilineare simmetrica positiva**) in L^2 . Notiamo che la diseguaglianza di Holder, con $p = q = 2$ dá la ben nota diseguaglianza di Cauchy-Schwartz .

Lo spazio L^2 **é uno spazio di Hilbert**:

SPAZI DI HILBERT . Sia $(H, \|.\|)$ spazio di Banach. Se esiste in H un **prodotto scalare** $< x, y > := b(x, y), \quad x, y \in H$ ovvero b é **bilineare** e

$$< x, y > = < y, x > \quad \forall x, y \in H, \qquad < x, x > \; > \; 0 \quad \forall x \in H, \quad x \neq 0$$

tale che $\|x\| = \sqrt{< x, x >} \quad \forall x \in H$, H si dice spazio di Hilbert.

Le seguenti (ben note) proprietá si verificano facilmente:

Cauchy-Schwartz : $\quad | < x, y > | \; \leq \; \|x\| \, \|y\| \quad \forall x, y \in H$

Pitagora : $\quad < x, y >= 0 \;\Rightarrow\; \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \forall x, y \in H$

Regola del Parallelogramma : $\quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

La proprietá fondamentale degli spazi di Hilbert é l'esistenza della

PROIEZIONE ORTOGONALE : Sia V sottospazio lineare chiuso di H.

Allora $\quad \forall h \in H \quad \exists! \; v(h) \in V : \quad < h - v(h), v >= 0 \quad \forall v \in V$

Tale vettore si chiama proiezione ortogonale di h su V e si indica $P_V h$. L'operatore P_V é una **proiezione lineare** ed é **continua**:

$$P_V(rh + sk) = rP_V(h) + sP_V(k) \quad \forall r, s \in \mathbf{R}, h, k \in H, \qquad P_V^2 = P_V$$

$$\|P_V(h)\| \leq \|h\| \quad \forall h \in H$$

Inoltre, indicato $V^\perp := \{h \in H : \; < h, v >= 0 \quad \forall v \in V\}$, risulta $KerP_V = V^\perp$.

Prova. Il vettore $v(h)$ é quello che realizza la minima distanza di h da V:

$$\text{se} \qquad d := \inf_{v\in V} \|h-v\|, \qquad \text{allora} \qquad \|h-v(h)\| = d$$

Esistenza: Mostriamo innanzi tutto che tale inf é realizzato: se $v_n \in V$ é minimizzante, cioé $\|h-v_n\| \to_n d$, allora, dalla regola del parallelogramma

$$\|v_n-v_m\|^2 = \|(v_n-h)+(h-v_m)\|^2 = 2(\|v_n-h\|^2+\|h-v_m\|^2) - \|2[\frac{v_n+v_m}{2}-h]\|^2$$

$$\leq 2(\|v_n-h\|^2+\|h-v_m\|^2) - 4d^2 \to_n 0$$

perché $\|\frac{v_n+v_m}{2}-h\| \geq d$ in quanto $\frac{v_n+v_m}{2} \in V$; dunque v_n é di Cauchy e quindi converge, necessariamente ad un elemento di V perché V é chiuso.

Poi, se $\overline{v}$ realizza il minimo, cioé $\|h-\overline{v}\| = d$, allora, fissato $v \in V$ e posto $\varphi_v(t) := \|h-\overline{v}+tv\|^2 = \|h-\overline{v}\|^2 + t^2\|v\|^2 + 2t < h-\overline{v}, v >$, risulta $\varphi_v(t) \geq \varphi_v(0) \quad \forall t \in \mathbf{R}$, cioé $t=0$ é di minimo per $\varphi_v(t)$ e quindi $0 = \varphi_v'(0) = 2 < h-\overline{v}, v > \quad \forall v \in V$.

Unicitá: se $v_1, v_2 \in V$ sono tali che $< h-v_1, v >=< h-v_2, v > \quad \forall v \in V$ allora $< v_2-v_1, v >=< h-v_1, v > - < h-v_2, v >= 0 \quad \forall v \in V$ e quindi, prendendo $v = v_2-v_1$, troviamo che $v_1 = v_2$.

Linearitá: $< h-P_Vh, v > = < k-P_Vk, v > = 0 \quad \forall v \in V \quad \Rightarrow$ $< rh+sk-(rP_Vh+sP_Vk), v >= 0 \quad \forall v \in V \quad \Rightarrow \quad P_V(rh+sk) = rP_Vh+sP_Vk$ per l'unicitá. Poi, siccome $P_Vv = v \quad \forall v \in V$ e $P_Vh \in V \quad \forall h \in H$, P_V é idempotente. Inoltre, $P_Vh = 0 \Leftrightarrow < h, v >= 0 \quad \forall v \in V$.

Continuitá: Per Pitagora:

$$\|h\|^2 = \|(h-P_Vh)+P_Vh\|^2 = \|h-P_Vh\|^2 + \|P_Vh\|^2 \geq \|P_Vh\|^2 \quad \forall h \in H$$

Corollario : $V = \overline{V} \quad \Rightarrow \quad H = V \oplus V^\perp$.

Infatti $V \cap V^\perp = \{0\}$ ed ogni $h \in H$ si scrive come $h = P_Vh+(h-P_Vh) \in V+V^\perp$.

ESEMPIO. Sia $V =< e_1, \ldots, e_n >$, $e_j \in H$, $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$. Allora $P_Vh = \sum_{j=1}^n < h, e_j > e_j$.

Essendo tutte le norme su $\mathbf{R}^n$ tra loro equivalenti, V é completo e quindi é chiuso in H. Poi, $P_Vh := \sum_j h_je_j \;\Rightarrow\; 0 = < h-P_Vh, e_j > = < h, e_j > - < \sum_i h_ie_i\, ,\, e_j > =< h, e_j > -h_j \;\Rightarrow\; P_Vh = \sum_{j=1}^n < h, e_j > e_j$.

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI RIESZ .

Sia $l : H \to \mathbf{R}$ lineare e continuo. Allora

$$\exists \quad h \in H : \quad l(x) \ = < x, h > \quad \forall x \in H$$

Prova. Se $l(x) = 0 \quad \forall x \in H$, basta prendere $h = 0$. Altrimenti, l continuo $\Rightarrow V := l^{-1}(0)$ é sottospazio lineare chiuso proprio di H, e quindi esiste $h \neq 0$ tale che $< h, v >= 0 \quad \forall v \in V$. Posiamo supporre $\|h\| = 1$. Siccome $l(x - \frac{l(x)}{l(h)}h) = 0 \quad \forall x \in H$, abbiamo che $< h, x - \frac{l(x)}{l(h)}h >= 0 \quad \forall x \in H$ ovvero $l(x) =< x, l(h)h >$.

NOTA. Lo spazio lineare $H' := \{l : H \to \mathbf{R} : \quad l$ é lineare e continuo$\}$ dotato della norma degli operatori

$$\|l\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|l(x)|}{\|x\|}$$

é uno spazio di Banach. Tale spazio é detto **duale algebrico topologico** di H.

Dato $h \in H$, il funzionale $l_h : H \to \mathbf{R}$ definito come $l_h(x) :=< x, h >$, é chiaramente lineare e, per Cauchy-Schwartz, continuo e quindi é un elemento di H'. Inoltre, l'applicazione

$$T : h \to l_h$$

di H in H' é chiaramente lineare e, di piú, $\|T(h)\| = \|l_h\| = \|h\|$. Il Teorema di Riesz dice che T é suriettiva. In altre parole

Corollario (RIESZ) .

Ogni spazio di Hilbert é isometricamente isomorfo al suo duale.

Diseguaglianza di BESSEL .

$$e_j \in H, \ < e_i, e_j >= \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \sum_j | < h, e_j > |^2 \ \leq \|h\|^2 \quad \forall h \in H$$

Prova. Posto $V_n =< e_1, \ldots, e_n >, \quad P_n := P_{V_n}, \quad$ é

$$\sum_{j=1}^{n} | < h, e_j > |^2 \ = \ \|P_n h\|^2 \ \leq \ \|h\|^2 \quad \forall h \in H, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

BASE HILBERTIANA (o base ortonormale) .

• Un sistema di vettori e_j é **sistema ortonormale** se $\quad < e_i, e_j >= \delta_{ij}$

•• Un sistema di vettori e_j é **completo** se $\quad < x, e_j >= 0 \quad \forall j \quad \Rightarrow \quad x = 0$

NOTA. (i) Se la varietá lineare H_0 generata dagli e_j é densa, allora il sistema é completo (e viceversa). Ad esempio, $\quad e_j := \frac{e^{ijt}}{\sqrt{2\pi}}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad j \in \mathbf{Z}$ formano un sistema ortonormale in $L^2([0, 2\pi])$.Ció segue dal teorema di Weierstrass (ogni funzione continua in $[0, 2\pi]$ é limite uniforme di polinomi trigonometrici) e del fatto che, come vedremo, se Ω é aperto in $\mathbf{R}^N$, $C_0^\infty(\Omega)$ (spazio delle funzioni $C^\infty(\Omega)$ a supporto compatto contenuto in Ω), é denso in ogni L^p.

(ii) **Ogni Hilbert separabile ha un sistema ortonormale (numerabile) completo**: da ogni insieme numerabile denso si puó costruire, usando un procedimento di ortonormalizzazione alla Gram-Schmidt, un sistema (numerabile) ortonormale che genera una varietá lineare densa (e quindi é completo).

• • • Un sistema ortonormale di vettori e_j é **base hilbertiana** se

$$x = \sum_j < x, e_j > e_j := \lim_n \sum_{j=1}^n < x, e_j > e_j \quad \forall x \in H$$

I numeri $< x, e_j >$ si chiamano **coefficenti di Fourier** di x nella base e_j.

Proposizione 1. Un sistema ortonormale completo e_j é base hilbertiana e

(**IDENTITÁ DI PARSEVAL**) $$\|x\|^2 = \sum_j | < x, e_j > |^2 \quad \forall x \in H$$

Sia $x_n := \sum_{j=1}^n < x, e_j > e_j$. Dalla diseguaglianza di Bessel segue che $\|x_{n+p} - x_n\|^2 = \sum_{n+1}^{n+p} | < x, e_j > |^2 \to_n 0$ per ogni p, ovvero x_n é di Cauchy e quindi converge, diciamo a $\overline{x}$. Proviamo che $\overline{x} = x$. Infatti, $< \overline{x}, e_k >= \lim_n < x_n, e_k >=< x, e_k >$. Dunque $< x - \overline{x}, e_k >= 0 \quad \forall k$ e quindi $x = \overline{x}$. Infine, $x_n \to x \Rightarrow \|x_n\| \to_n \|x\|$ e quindi $\sum_{j=1}^n | < x, e_j > |^2 = \|x_n\|^2 \to \|x\|^2$.

Proposizione 2. Ogni Hilbert separabile ha una base hilbertiana.

NOTA. Sia e_j base ortonormale. Da Parseval: $\quad x \to (Fx)_j :=< x, e_j >, \ x \in H$ é una isometria (lineare) di H su l^2. (Suriettivitá: $\quad (a_j)_{j \in \mathbf{N}}, \ \sum_j |a_j|^2 < +\infty \quad \Rightarrow \quad x := \sum_j a_j e_j \in H \quad$ é tale che $\quad (Fx)_j = a_j$.)

Teorema di isomorfismo. Ogni Hilbert separabile, é isometricamente isomorfo a l^2.

NOTA. Piú in generale, ogni Hilbert é isometricamente isomorfo a un $L^2(X, \mu)$, ove X é l'insieme degli indici di una base hilbertiana per H (eventualmente non numerabile) e μ é la misura che conta.

CONVERGENZA DEBOLE

Ricordiamo che $x_n \to_n x$ (x_n **converge in norma (o fortemente** ad x) se $\|x_n - x\| \to_n 0$ e $x_n \in H$ si dice **limitata** se $\sup_n \|x_n\| < +\infty$.

NOTA: **successioni limitate** in spazi di Hilbert di dimensione infinita **non hanno in generale sottosuccessioni convergenti**. Ad esempio, se $e_j, j \in \mathbf{N}$ é sistema ortonormale, allora $\|e_i - e_j\|^2 = 2$ se $i \neq j$ e quindi e_j non ha estratte convergenti.

Definizione $('\rightharpoonup' = $ ' converge debolmente').

$$x_n \rightharpoonup_n 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad < x_n, h > \to_n 0 \quad \forall h \in H$$

Si dice che $x_n \rightharpoonup_n x$ se $(x_n - x) \rightharpoonup_n 0$. Dalla diseguaglianza di Bessel segue ad esempio che, se $e_j, j \in \mathbf{N}$ é sistema ortonormale, $e_j \rightharpoonup_j 0$.

Proposizione 1

(i) $x_n \to x \quad \Rightarrow \quad x_n \rightharpoonup_n x$ (ma non viceversa !)

(ii) $x_n \rightharpoonup_n x,\ y_n \rightharpoonup_n y, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha x_n + \beta y_n \rightharpoonup_n \alpha x + \beta y$

(iii) $x_n \rightharpoonup_n x \quad \Rightarrow \quad \liminf \|x_n\| \geq \|x\|$

Prova. (i) $| < x_n - x, h > | \leq \|h\| \ \|x_n - x\| \to_n 0.$ (ii) ovvia
(iii) Possiamo supporre $x \neq 0$. Allora

$$| < x_n, \frac{x}{\|x\|} > | \leq \|x_n\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| = \lim_n | < x_n, \frac{x}{\|x\|} > | \leq \liminf \|x_n\|$$

NOTA. (iii) dice: la norma é 'inferiormente semicontinua rispetto alla convergenza debole'.

Teorema (uniforme limitatezza). $\quad x_n \rightharpoonup_n x \quad \Rightarrow \quad \sup_n \|x_n\| < +\infty$

Lemma di Mazur. $\quad x_n \in C \quad$ chiuso e convesso, $\quad x_n \rightharpoonup_n x \quad \Rightarrow \quad x \in C.$

Prova. Postposta.

Proposizione 2

(i) $x_n \rightharpoonup_n x, \;\; y_n \to y \quad \Rightarrow \quad < x_n, y_n > \to_n < x, y >$

(ii) $\overline{< e_i >} = H, \;\; < x_n, e_j > \to_n 0 \quad \forall j, \quad \sup_n \|x_n\| < +\infty \quad \Rightarrow \quad x_n \rightharpoonup_n 0$

Prova. (i) $\;| < x_n, y_n > - < x\,,\,y > | \; = \; | < x_n - x, y > \; + \; < x_n\,,\, y_n - y > | \; \leq$

$\leq \; | < x_n - x, y > | \; + \; \|y_n - y\| \, \|x_n\| \; \to_n 0$ $\quad$ perché $\; x_n \;$ é limitata

(ii) $\; < x_n, h > \to_n 0 \quad \forall h \in < e_j >$. $\quad$ Se $\quad h_k \in < e_j >, \quad h_k \to_k h$, $\quad$ allora $| < x_n, h > | \leq | < x_n, h_k > | + | < x_n, h - h_k > | \quad \Rightarrow \quad \limsup_n | < x_n, h > | \leq \|h_k - h\| \quad \sup_n \|x_n\| \quad \forall k \in \mathbf{N}$ e quindi $\quad \limsup_n | < x_n, h > | = 0.$

Compattezza debole. $\qquad$ Sia H Hilbert separabile. $\quad$ Allora

$x_n \quad$ **limitata** $\quad \Rightarrow \quad x_n \quad$ **ha una estratta debolmente convergente**.

Prova. $\quad$ Sia e_j base ortonormale. Siccome x_n é limitata, basta (vedi Proposizione 2-(ii)) provare che $\qquad \exists \quad x_{n_k}, \;\; x : \quad < x_{n_k}, e_j > \to_k < x, e_j > \quad \forall j \in \mathbf{N}$

Siccome $\quad | < x_n, e_1 > | \leq \sup_n \|x_n\| < +\infty, \quad$ esiste una (prima) selezione di indici $\quad n_j = n_j^1 \quad$ e un numero c_1 tale che $\quad c_1 = \lim_j < x_j^1, e_1 >$. $\quad$ Effettuando una (ulteriore) selezione di indici $\quad n_j^2, \quad$ troviamo che $\quad \exists c_i := \lim_j < x_{n_j^2}, e_i >$ $\; i = 1, 2$. $\quad$ Effettuando k successive selezioni di indici $\quad (n_j^{k-1})_{j \in \mathbf{N}} \subset (n_j^k)_{j \in \mathbf{N}} \quad$ ed applicando il **principio diagonale di Cantor** troviamo che lungo la sottosuccessione (diagonale) $\quad n_k := n_k^k \quad$ si ha $\qquad \exists c_i := \quad \lim_k < x_{n_k}, e_i > \quad \forall i \in \mathbf{N}$

Da $\quad \sum_{i=1}^N c_i^2 \; = \; \lim_k \sum_{i=1}^N | \; < \; x_{n_k}, e_i \; > \; |^2 \; \leq \; \sup_n \|x_n\|^2 \quad \forall N \quad$ segue che $\sum_{i=1}^\infty c_i^2 \; < \; +\infty$. $\quad$ Resta quindi definito il vettore in H dato da $\quad x := \sum_{i=1}^\infty c_i e_i$ avente appunto la proprietá $\quad < x, e_j > = c_j = \lim_k < x_{n_k}, e_j >$.

NOTA. $\quad$ L'ipotesi di separabilitá si puó facilmente eliminare, argomentando nella chiusura della varitá lineare generata dagli x_n (che é appunto separabile).

AM5: Esercizi e complementi- IV Settimana

SERIE DI FOURIER DI FUNZIONI $L^2([-\pi,\pi])$

Indichiamo con $C_{2\pi}$ lo spazio delle funzioni continue in $\mathbf{R}$ a valori complessi che sono 2π periodiche, dotato della norma della convergenza uniforme in $[-\pi,\pi]$:

$$C_{2\pi} := \{f \in C(\mathbf{R},\mathbf{C}) : \quad f(t+2\pi) = f(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}\}, \qquad \|f\|_\infty := \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|$$

Tra tali funzioni é definito il prodotto di convoluzione

$$f \star g \ (t) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\, g(s) ds$$

Indicheremo con $\mathcal{PT}$ il sottospazio dei polinomi trigonometrici, ovvero il sottospazio lineare generato da $e^{ijt} : j \in \mathbf{N}$.

Esercizio 1 . Provare che

(i) $f \star g = g \star f$ (ii) $f \in C_{2\pi}, \quad g \in \mathcal{PT} \Rightarrow f \star g \in \mathcal{PT}$

Esercizio 2. Siano $g_n \in C_{2\pi}$ tali che

$$g_n(t) \geq 0 \quad \forall t, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} g_n = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}, \qquad \int_{|t|\geq\delta} g_n \to_n 0 \quad \forall \delta > 0$$

Provare che $f \star g_n \to_n f$ uniformemente in $[-\pi,\pi]$.

Esercizio 3 . Siano

$$\tilde{g}(t) := \frac{1+\cos t}{2} = \frac{1}{2}[1 + \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}], \qquad g_n := \frac{\tilde{g}^n}{\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}^n}$$

Provare che le g_n soddisfano le condizioni dell'Esercizio 2 e concludere che $\mathcal{PT}$ é denso in $C_{2\pi}$.

Esercizio 4. Sia $f \in L^2([-\pi,\pi])$. Provare che

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \phi_\epsilon \in C_0([-\pi,\pi]) : \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |f-\phi_\epsilon|^2 \leq \epsilon$$

e concludere che $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt, \quad k \in \mathbf{N}$ é base hilbertiana in $L^2([-\pi,\pi])$.

SPAZI DI HILBERT, CONVERGENZA DEBOLE

Qui H indicherá uno spazio di Hilbert. $C \subset H$, $\Gamma : C \to \mathbf{R}$ sono **convessi** se

$$tx + (1-t)y \in C, \qquad \forall x, y \in C, \quad \forall t \in [0,1]$$

$$\Gamma(tx + (1-t)y) \quad \leq \quad t\Gamma(x) + (1-t)\Gamma(y) \qquad \forall x, y \in C, \quad \forall t \in [0,1]$$

Esercizio 1. Sia $C \subset H$ chiuso e convesso. Provare che

$$\forall h \in H, \quad \exists\ !\ h_C \in C : \quad \|h - h_C\| \leq \|h - v\|, \quad \forall v \in C$$

e che $$< h - h_C,\ v - h_C > \ \leq\ 0, \qquad \forall v \in C.$$

Esercizio 2. Sia C chiuso e convesso in H. Provare che

$$x_n \in C, \quad x_n \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad x \in C$$

Dedurre che, se $x_n \rightharpoonup x$ allora esistono $\tilde{x}_n$, combinazioni lineari convesse degli x_n, tali che $\|\tilde{x}_n - x\| \to_n 0$.

Esercizio 3. Sia C convesso e $\Gamma : C \to \mathbf{R}$ funzionale convesso e continuo.

Provare che $\quad x_n \in C, \quad x_n \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad \liminf \Gamma(x_n) \geq \Gamma(x)$

Esercizio 4. Sia C chiuso e convesso in H, $\Gamma : C \to \mathbf{R}$ continuo e

coercivo: $\quad x_n \in C, \quad \|x_n\| \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \Gamma(x_n) \to +\infty$

Provare che $\quad \exists \underline{x} \in C : \quad \inf_C \Gamma = \Gamma(\underline{x})$.

Esercizio 5. Provare che

$$x_n \rightharpoonup x, \ \|x_n\| \to \|x\| \ \Rightarrow \ \|x_n - x\| \to 0$$

Esercizio 6. Sia $L \in \mathcal{L}\,(H)$ (operatore lineare e continuo in H).

Provare che esiste un (unico) $L^\star \in \mathcal{L}\,(H)$ tale che $< L^\star x, y > = < x, Ly >$ $, \forall x, y \in H$ (**operatore aggiunto** di L).

Dedurre che $\quad x_n \rightharpoonup x \ \Rightarrow \ x_n \rightharpoonup x$

CENNI DI SOLUZIONE

Serie di Fourier in $L^2([-\pi,\pi])$

Esercizio 1 - (ii). Sia $g(t)=\sum_{j=1}^n c_j\, e^{ijt}$. Si ha

$$(f\star g)(t) \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,\left[\sum_{j=1}^n c_j\, e^{ij(t-s)}\right] ds = \sum_{j=1}^n\, [c_j \int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ijs}\,ds]\; e^{ijt}$$

Esercizio 2.

$$|(f\star g_k)(t)\; - \;f(t)| \;=\; \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\,g_k(s)\,ds \;-\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,g_k(s)\,ds\right| \;\le$$

$$\le \int_{|s|\le\delta} |f(t-s)-f(t)|\;\; g_k(s)\,ds \;+\; 2\,\|f\|_\infty \int_{|s|\ge\delta} g_k(s)\,ds \;\le\; \epsilon \;+\; 2\|f\|_\infty\epsilon$$

se $\delta\le\delta_\epsilon$, $|s|\le\delta \;\Rightarrow\; |f(t-s)-f(s)|\le\epsilon$ e $k\ge k_\epsilon \;\Rightarrow\; \int_{|t|\ge\delta} g_k\le\epsilon.$

Esercizio 3. Si tratta di provare che $\int_{|s|\ge\delta} g_k(s)\,ds \;\to_k 0 \quad \forall\delta>0.$

Cominciamo con l'osservare che

$$c_k:=\int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1+\cos t}{2}\right]^k dt \quad\ge\; 2\int_0^{\pi}\left[\frac{1+\cos t}{2}\right]^k \sin t\;dt =$$

$$= \quad -\frac{4}{k+1}\int_0^{\pi} \frac{d}{dt}\left[\frac{1+\cos t}{2}\right]^{k+1} = \frac{4}{k+1}$$

Quindi

$$\frac{1}{c_k}\int_{|s|\ge\delta} g_k(s)\,ds \;\le\; \frac{(k+1)\pi}{2}\left[\frac{1+\cos\delta}{2}\right]^k \quad\to_k 0 \quad \forall\delta>0$$

Esercizio 4. Possiamo supporre $f\equiv 0$ fuori di $[-\pi,\pi]$ e infatti

$$f\equiv 0 \qquad \forall\; t\notin[-\pi+\frac{1}{n},\pi-\frac{1}{n}] \qquad\qquad \text{perché}$$

$\int|f-f\chi_{[-\pi+\frac{1}{n},\pi-\frac{1}{n}]}|^2\le\epsilon$ se n é grande (assoluta continuitá dell'integrale). Siccome $f=f^+-f^-$, basta provare che se $\quad g \geq 0, \quad g \in L^2(\mathbf{R}), \quad g(t) = 0 \quad \forall\, t \notin [-\pi + \frac{1}{n}, \pi - \frac{1}{n}],$ allora

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \tilde{g} \in C_0((-\pi, \pi)) : \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |g - \tilde{g}|^2 \leq \epsilon$$

Siccome poi esistono funzioni semplici $0 \leq \phi_n \leq g$ con $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ puntualmente convergenti a f, e quindi (convergenza monotona!) convergenti a g anche in L^2, basta provare che,

se $\quad E \subset [-\pi + \frac{1}{n}, \pi - \frac{1}{n}]$ é Lebesgue misurabile , allora

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \quad h \in C_0(-\pi, \pi) : \quad \int |\chi_E - h|^2 \leq \epsilon$$

Ma ció segue subito dal fatto che

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \quad K_\epsilon \subset E \subset O_\epsilon \subset (-\pi, \pi) : \qquad L^1(O_\epsilon \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$$

con K_ϵ compatto, O_ϵ aperto.

Infatti, dato $\delta > 0$ tale che $d(x, K_\epsilon) \leq \delta \Rightarrow x \in O_\epsilon$, basta prendere $\varphi_\epsilon(x) := \gamma(d(x, K_\epsilon))$ ove $\gamma \in C(\mathbf{R})$ con $\gamma(0) = 1$ e $\gamma(t) = 0$ se $t \geq \delta$:

$$\int |\varphi_\epsilon - \chi_E|^2 \leq 4 \int \chi_{O_\epsilon \setminus K_\epsilon} = 4L^1(O_\epsilon \setminus K_\epsilon) \leq 4\epsilon$$

Spazi di Hilbert, convergenza debole

Esercizio 1. L'esistenza di h_C segue come nel caso in cui C é sottospazio lineare. Poi,

$$v \in C \;\Rightarrow\; \|h - [tv + (1-t)h_C\|^2 \geq \|h - h_C\|^2 \quad \forall t \in [0,1] \;\Rightarrow$$

$$0 \;\leq\; \frac{d}{dt} \left[\|h - [tv + (1-t)h_C\|^2\right]_{|t=0} \;=$$

$$\frac{d}{dt} \left[\|h\|^2 + t^2\|v\|^2 + (1-t)^2\|h_C\|^2 - 2 < h, tv + (1-t)h_C > + 2t(1-t) < v, h_C >\right]_{|t=0}$$

$$= \; -2\|h_C\|^2 - 2 < h, v > + 2 < h, h_C > + 2 < v, h_C > \; = \; -2 \; < h - h_C, v - h_C >$$

Esercizio 2. $x_n \in C, \; x_n \rightharpoonup x, \; x_C$ proiezione di x sul convesso chiuso $C \Rightarrow$

$$< x - x_C, x_n - x_C > \leq 0 \quad \Rightarrow \quad < x - x_C, x - x_C > \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_C \in C$$

Esercizio 3. Sia $c := \liminf_n \Gamma(x_n) = \lim_j \Gamma(x_{n_j})$. Allora

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists j_\epsilon : \qquad j \geq j_\epsilon \quad \Rightarrow \quad x_{n_j} \in \Gamma^{c+\epsilon} := \{x \in C : \Gamma(x) \leq c + \epsilon\}$$

Ora, $\Gamma^{c+\epsilon}$ é chiuso (perché Γ é continuo) e convesso (perché Γ é convesso), e quindi (Esercizio 2)

$$x_n \rightharpoonup x \ , x_n \in \Gamma^{c+\epsilon} \quad \Rightarrow \quad x \in \Gamma^{c+\epsilon} \quad \forall \epsilon > 0$$

ovvero $\Gamma(x) \leq c + \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$

Esercizio 4. Sia $x_n \in C$ minimizzante: $\Gamma(x_n) \to \inf_C \Gamma.$

Dalla coercivitá segue $\sup_n \|x_n\| < +\infty$ e quindi esiste una sottosuccessione x_{n_k} (ancora minimizzante) che converge debolmente a un x. Siccome C é chiuso e convesso, allora (Esercizio 2) $x \in C$ e quindi (Esercizio 3)

$$\inf_C \Gamma \quad = \quad \liminf_k \Gamma(x_{n_k}) \quad \geq \quad \Gamma(x) \quad \geq \quad \inf_C \Gamma$$

Esercizio 5. $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2 < x, x_n > \to 2\|x\|^2 - 2 < x, x >.$

Esercizio 6. Indichiamo con $G : H \to H^\star$ l'isomorfismo di Riesz:

$$\forall h \in H, \qquad G(h)\ (x) \ = < h, x > \quad \forall x \in H$$

Fissato $y \in H$, $x \to l^y(x) := < L(x), y >$ é un funzionale lineare e continuo e quindi esiste un unico vettore, diciamo $L^\star(y)$, tale che

$$G(L^\star(y)) = l^y, \quad \text{ovvero} \qquad < L^\star(y), x > \ = \ l^y(x) = < L(x), y > \quad \forall x \in H$$

Chiaramente, $L^\star$ é lineare e $| < L^\star(y), x > | \ = \ | < L(x), y > |$

$$\leq \ \|Lx\| \ \|y\| \ \leq \ \|L\| \ \|x\| \ \|y\| \quad \Rightarrow \quad \|L^\star(y)\ \| \ \leq \ \|L\| \ \|y\|$$

e quindi $L^\star$ é continuo e

$$\|L^\star\| := \ \sup\{\|L^\star(y) : \ \ \|y\| \leq 1\} \ \leq \ \|L\|$$

In effetti, siccome chiaramente $(L^\star)^\star = L$, si ha $\|L^\star\| = \|L\|$. Infine,

$$x_n \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad < L(x_n), y > = < L^\star(y), x_n > \to < L^\star(y), x > = < L(x), y > \quad \forall y \in H$$