

AM5: Tracce delle lezioni- I Settimana

Definizione 1: σ -algebra, misure.

Dato un insieme X , una famiglia Σ di sottoinsiemi di X si chiama σ -algebra se

$$(i) \quad \emptyset \in \Sigma, \quad (ii) \quad E \in \Sigma \Rightarrow E^c \in \Sigma, \quad (iii) \quad E_j \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j \in \Sigma$$

Una funzione $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$, si chiama misura se: $\mu(\emptyset) = 0$ e

$$\text{(numerabile additivit\`a)} \quad E_j \in \Sigma, \quad E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \quad \Rightarrow$$

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E_j)$$

!! \rightarrow !! Siccome $A \setminus B = (A^c \cup B)^c$, $\bigcap_j A_j = (\bigcup_j A_j^c)^c$, si ha che

$$A, B \in \Sigma \Rightarrow A \setminus B \in \Sigma, \quad A_j \in \Sigma \Rightarrow \bigcap_j A_j \in \Sigma$$

Proposizione 1. Sia $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$ misura. Allora

- (i) $A, B \in \Sigma, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
- (ii) $A, B \in \Sigma, A \subset B, \mu(A) < +\infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
- (iii) $E_j \in \Sigma, E_j \subset E_{j+1} \quad \forall j \Rightarrow \mu(E_j) \rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\right)$ (in modo crescente)
- (iv) $E_j \in \Sigma, E_{j+1} \subset E_j \quad \forall j, \mu(E_1) < +\infty \Rightarrow \mu(E_j) \rightarrow \mu\left(\bigcap_{j=1}^{+\infty} E_j\right)$

Infatti, (i)-(ii) $B = (B \setminus A) \cup A \Rightarrow \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$

(iii) Siccome $\mu(E_n) \leq \mu(E_{n+1}) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\right)$, possiamo supporre $\lim_n \mu(E_n) < +\infty$ ed allora $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\right) \leq \mu(E_n) + \sum_{j=n}^{\infty} \mu(E_{j+1} \setminus E_j) \leq \mu(E_n) + \epsilon$ per n grande, perch\`e $E_{n+1} = E_1 \cup \left(\bigcup_{j=1}^n [E_{j+1} \setminus E_j]\right)$ (unione disgiunta) \Rightarrow

$$\mu(E_1) + \sum_{j=1}^n \mu(E_{j+1} \setminus E_j) = \mu(E_{n+1}) \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_{j+1} \setminus E_j) \leq \sup_n \mu(E_n) < +\infty$$

(iv) Siccome $E_1 \setminus E_j \subset E_1 \setminus E_{j+1}$ e $\bigcup_j (E_1 \setminus E_j) = E_1 \setminus \bigcap_j E_j$, da (ii)- (iii) segue

$$\mu(E_1) - \mu(E_j) \rightarrow \mu\left(\bigcup_i (E_1 \setminus E_i)\right) = \mu(E_1 \setminus \bigcap_i E_i) = \mu(E_1) - \mu\left(\bigcap_i E_i\right)$$

Definizione 2: Misure "esterne" (generazione di misure).

Dato un insieme X , sia $\mathcal{P}(X) := \{A : A \subset X\}$ l'insieme delle parti di X . Una funzione $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$, si chiama misura (esterna), se $\mu(\emptyset) = 0$ e

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j) \quad (\text{numerabile subadditivit\`a})$$

! \rightarrow ! μ \u00e9 monotona: $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

Esempi: le misure (esterne) di Lebesgue e di Hausdorff in \mathbf{R}^N

Misura di Lebesgue. Qui $R = I_1 \times \dots \times I_N$, I_j intervalli in \mathbf{R} , denota un rettangolo in \mathbf{R}^N , e $\text{Vol}(R) = l(I_1) \times \dots \times l(I_N)$ ($0 \cdot \infty := 0$) \u00e9 il suo volume ($l(I) :=$ lunghezza di I). La misura di Lebesgue L^N \u00e9 definita dalla posizione:

$$L^N(A) := \inf \left\{ \sum_1^{+\infty} \text{Vol}(R_j) : A \subset \bigcup_j R_j \right\}, \quad A \subset \mathbf{R}^N$$

Nota che $L^N(R) = \text{Vol}(R)$. L^N \u00e9 misura (esterna). Infatti, dato $A \subset \bigcup_j A_j$, e supposto $\mu(A_j) < \infty \ \forall j$, sia $A_j \subset \bigcup_i R_{ij}$ con $\sum_i \text{Vol}(R_{ij}) \leq L^N(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$. Allora $A \subset \bigcup_{ij} R_{ij}$ e quindi $L^N(A) \leq \sum_{ij} \text{Vol}(R_{ij}) \leq 2\epsilon + \sum_j L^N(A_j)$.

Invarianza per traslazione, N-omogeneit\`a.

Ricordiamo che se $A \subset \mathbf{R}^N, h \in \mathbf{R}^N, t > 0$, $A + h := \{x + h \mid x \in A\}$, $tA := \{tx \mid x \in A\}$ sono rispettivamente il traslato di A lungo h , il dilatato di A (di coefficiente t). Da $\text{vol}(R + h) = \text{vol}(R)$, $\text{vol}(tR) = t^N \text{vol}(R)$, segue che

$$L^N(A + h) = L^N(A), \quad L^N(tA) = t^N L^N(A) \quad \forall A \subset \mathbf{R}^N, \quad h \in \mathbf{R}^N, \quad t \geq 0$$

Misura di Hausdorff. Dati $s \geq 0, \delta > 0, A \subset \mathbf{R}^n$, siano

$$H_\delta^s(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} (\text{diam } C_j)^s : A \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} C_j, \quad C_j = \overline{C}_j, \quad \text{diam } C_j \leq \delta \right\}$$

$$H^s(A) := \sup_{\delta > 0} H_\delta^s(A)$$

H^s \u00e9 misura (esterna) (detta di Hausdorff s-dimensionale).

Come sopra, $H^s(A + h) = H^s(A)$, $H^s(tA) = t^s H^s(A)$.

Definizione 3: Insiemi misurabili. Sia μ misura (esterna) su X . Diremo che

$E \subset X$ è μ -misurabile se $\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c), \quad \forall A \subset X$

o, equivalentemente, $A \subset E, B \subset E^c \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

Σ_μ denoterá la classe dei μ -misurabili.

! \rightarrow !(i) $\mu(E) = 0 \Rightarrow E \in \Sigma_\mu$.

! \rightarrow !(ii) $E \subset \mathbf{R}^n$ é (Lebesgue) misurabile $\Rightarrow E + h, \quad tE$ sono (Lebesgue) misurabili .

Proposizione 2 : $\mu|_{\Sigma_\mu}$ é una misura

(i) $E_j \in \Sigma_\mu, E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \Rightarrow \mu(\cup_{j=1}^{+\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E_j)$

(ii) Σ_μ é una σ -algebra

Prova di (i): $E \in \Sigma_\mu, A \cap E = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup E) = \mu(A) + \mu(E)$.
Dall'ipotesi segue quindi $\mu(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_1^n \mu(E_i), \quad \forall n$ e quindi

$$\sum_1^{+\infty} \mu(E_i) \geq \mu(\cup_{i=1}^{+\infty} E_i) \geq \mu(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_1^n \mu(E_j) \quad \forall n$$

Prova di (ii) : Ovviamente $\emptyset \in \Sigma_\mu$ e $E \in \Sigma_\mu$ se e solo se $E^c \in \Sigma_\mu$. Poi

$$\begin{aligned} E_1, E_2 \in \Sigma_\mu &\Rightarrow \mu(A) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu(A \cap E_1^c \cap E_2^c) = \\ &= \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \Sigma_\mu \end{aligned}$$

In particolare, $E, F \in \Sigma_\mu \Rightarrow E \setminus F = (E^c \cup F)^c \in \Sigma_\mu$ e quindi $F_1 := E_1$ e $F_{n+1} := E_{n+1} \setminus \cup_{j=1}^n E_j$ sono misurabili.

Siccome $\cup_{j=1}^n F_j = \cup_{j=1}^n E_j$ si deduce che gli F_n sono tutti disgiunti e la loro unione uguaglia l'unione degli E_n . Sostituendo eventualmente gli E_n con gli F_n , possiamo supporre gli E_j tra loro disgiunti.

Ora, dalla misurabilitá di $\cup_{j=1}^n E_j$ segue che $\mu(A) \geq \mu(A \cap (\cup_{j=1}^n E_j)) + \mu(A \cap (\cup_{j=1}^n E_j)^c)$. Ma, essendo gli E_j misurabili e disgiunti, é $\mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap E_2)$ e quindi, iterando, $\mu(A \cap (\cup_1^n E_j)) = \sum_{i=1}^n \mu(A \cap E_i)$. Dunque , passando al limite

$$\mu(A) \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A \cap E_i) + \mu(A \cap (\cup_{i=1}^{+\infty} E_i)^c) \geq \mu(A \cap (\cup_{i=1}^{+\infty} E_i)) + \mu(A \cap (\cup_{i=1}^{+\infty} E_i)^c)$$

○ **ESEMPIO di un insieme in \mathbf{R} che non é Lebesgue misurabile.**

Sia $A_x := (x + \mathbf{Q}) \cap [0, 1]$. \acute{E}

$$x - y \notin \mathbf{Q} \Rightarrow A_x \cap A_y = \emptyset, \quad x - y \in \mathbf{Q} \Rightarrow A_x = A_y$$

Poi, dall'assioma della scelta:

$$\exists Z \subset \mathbf{R} \quad \text{tale che} \quad \forall x : \quad Z \cap A_x \quad \acute{e} \text{ esattamente un punto.}$$

Proprietá di Z :

$$\cup_{q \in \mathbf{Q}} (Z + q) = \mathbf{R}, \quad q_1 \neq q_2 \Rightarrow (Z + q_1) \cap (Z + q_2) = \emptyset$$

Sia poi $\alpha : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q}$ biiezione, $q_j := \alpha(j)$. Da

$$L^1(\mathbf{R}) \leq \sum_j L^1(Z + q_j) = \sum_j L^1(Z), \quad \text{segue} \quad L^1(Z) > 0$$

Sia infine $q_{j_k} \in [0, 1] \quad \forall k$ e quindi $2 = L^1([0, 2]) \geq L^1(\cup_1^n (Z + q_{i_k}))$.

Se Z fosse misurabile, lo sarebbero anche gli $Z + q_{j_k}$, e quindi risulterebbe

$$L^1(\cup_1^n (Z + q_{i_k})) = \sum_1^n L^1(Z + q_{j_k}) = nL(Z) \quad \text{e quindi} \quad n \leq \frac{2}{L^1(Z)} \quad \forall n$$

contraddizione.

MISURE BORELIANE, di RADON

Sia (X, d) spazio metrico, e sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ la piú piccola sigma algebra che contiene i chiusi di X . \mathcal{B} , intersezione di tutte le σ -algebre che contengono i chiusi di X , si chiama la sigma algebra dei boreliani di X .

Definizione 4.

Una misura (esterna) μ su X si dice **misura boreliana** se $\mathcal{B} \subset \Sigma_\mu$.

Se di piú μ é finita sui compatti, μ si dice di Radon.

Definizione 5. Una misura (esterna) μ su X si dice **misura metrica** se

$$0 < d(A, B) \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Proposizione 3: μ metrica $\Rightarrow \mu$ boreliana

Premettiamo il

Lemma . Siano μ misura metrica su (X, d) , $E_j \subset E_{j+1} \forall j$. Allora

$$d(E_{j+2} \setminus E_{j+1}, E_j \setminus E_{j-1}) > 0 \quad \forall j \geq 2 \Rightarrow \mu(E_j) \rightarrow \mu(\cup_j E_j)$$

Prova del Lemma. Possiamo supporre $\sup_j \mu(E_j) < +\infty$.

Siccome, dall'ipotesi ed essendo μ misura metrica,

$$\mu(E_2 \setminus E_1) + \dots + \mu(E_{2n} \setminus E_{2n-1}) = \mu(\cup_{j=1}^n [E_{2j} \setminus E_{2j-1}]) \leq \mu(E_{2n}) \leq \sup_j \mu(E_j)$$

$$\mu(E_3 \setminus E_2) + \dots + \mu([E_{2n+1} \setminus E_{2n}]) = \mu(\cup_{j=1}^n [E_{2j+1} \setminus E_{2j}]) \leq \mu(E_{2n+1}) \leq \sup_j \mu(E_j)$$

otteniamo $\sum_j \mu([E_{j+1} \setminus E_j]) < +\infty$ e quindi $\sum_{j \geq n} \mu([E_{j+1} \setminus E_j]) \rightarrow_n 0$ e quindi

$$\mu(\cup_j E_j) \leq \mu(E_n) + \sum_{j \geq n} \mu([E_{j+1} \setminus E_j]) \quad \forall n \Rightarrow \mu(\cup_j E_j) \leq \lim_n \mu(E_n)$$

\rightarrow Gli E_j non si suppongono misurabili!

Prova della Proposizione 3. Sia $C = \overline{C}$ un insieme chiuso.

Siano $A \subset C$, $B \subset C^c$. Sia $B_n := \{x \in B : d(x, C) \geq \frac{1}{n}\}$.

Si ha che $B = \cup_n B_n$ perché $B \subset C^c$, e C^c é aperto. Inoltre

$$d(B_{j+2} \setminus B_{j+1}, B_j \setminus B_{j-1}) \geq \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} > 0 \quad \forall j \geq 2$$

Dal Lemma segue quindi che $\mu(B_n) \rightarrow \mu(B)$ e quindi

$$\mu(A \cup B) \geq \mu(A \cup B_n) = \mu(A) + \mu(B_n) \rightarrow \mu(A) + \mu(B)$$

Proposizione 4: L^N é metrica e quindi boreliana.

Infatti, sia $0 < \delta := d(A, B)$. Dato $\epsilon > 0$, siano R_j tali che

$$A \cup B \subset \cup_j R_j, \quad \text{diam} R_j \leq \frac{\delta}{2}, \quad \sum_j \text{Vol} R_j \leq \mu(A \cup B) + \epsilon$$

Allora $\mu(A) + \mu(B) \leq \sum_{R_j \cap A \neq \emptyset} \text{Vol} R_j + \sum_{R_j \cap B \neq \emptyset} \text{Vol} R_j \leq \mu(A \cup B) + \epsilon$.

Proposizione 5. L^N é borel regolare:

$$\forall A \subset \mathbf{R}^N \quad \exists B \in \mathcal{B} : \quad A \subset B \text{ e } L^N(A) = L^N(B)$$

Infatti $L^N(A) = L^N(\cap_j \cup_i R_{ij})$ con $A \subset \cup_i R_{ij}$, $\sum_i \text{Vol } R_{ij} \leq L^N(A) + \frac{1}{j}$

Proposizione 6: $A_j \subset A_{j+1} \Rightarrow L^N(A_j) \rightarrow L^N(\cup_j A_j)$

\rightarrow gli A_j non sono supposti misurabili!

Verifica: siano $B_j \in \mathcal{B}$, $A_j \subset B_j$, tali che $L^N(A_j) = L^N(B_j)$.

É $A_n \subset \cap_{j \geq n} B_j$ e $\cap_{j \geq n} B_j$ é famiglia crescente (di misurabili). Dunque

$$L^N(\cup_n A_n) \leq L^N(\cup_n \cap_{j \geq n} B_j) = \lim L^N(\cap_{j \geq n} B_j) \leq \lim L^N(A_n)$$

Proposizione 7: Approssimazione mediante aperti, compatti

i) $\forall A \subset \mathbf{R}^N : L^N(A) = \inf\{L^N(O) : A \subset O, O \text{ aperto}\}$

ii) $\forall E$ misurabile : $L^N(E) = \sup\{L^N(K) : K \subset E, K \text{ compatto}\}$

La i) segue dal fatto che $\text{vol}(\mathbf{R}) = \text{vol}(\text{int } \mathbf{R})$.

(ii) Sia dapprima $E \subset B_r$ e sia O_j aperto tale che $\overline{B_r} \setminus E \subset O_j$, con

$$L^N(O_j) \leq L^N(\overline{B_r} \setminus E) + \frac{1}{j} = L^N(\overline{B_r}) - L^N(E) + \frac{1}{j} \quad \text{e quindi} \quad L^N(E) \leq$$

$$L^N(\overline{B_r}) - L^N(O_j) + \frac{1}{j} \leq L^N(\overline{B_r}) - L^N(O_j \cap \overline{B_r}) + \frac{1}{j} = L^N(\overline{B_r} \setminus O_j) + \frac{1}{j}$$

Dunque, $K_j := \overline{B_r} \setminus O_j$ é un compatto contenuto in E e $L^N(E) \leq L^N(K_j) + \frac{1}{j}$.

Nel caso generale, se B_n denota la palla di raggio n , $L^N(E \cap B_n) \rightarrow_n L^N(E)$. Quindi, se $K_n \subset E \cap B_n$ é compatto tale che $L^N(E \cap B_n) \leq L^N(K_n) + \frac{1}{n}$ si ha $L^N(E) \leq \lim_n L^N(K_n) \leq L^N(E)$.

○ \rightarrow !! Da ii) segue che, se $L^N(E) < +\infty$ ed E é misurabile allora

$$(*) \quad \forall \epsilon, \quad \exists K_\epsilon \subset E \subset O_\epsilon, K_\epsilon \text{ compatto, } O_\epsilon \text{ aperto} : L^N(O_\epsilon \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$$

Viceversa, se vale (*), E é misurabile: $E = (\cap_n O_{\epsilon_n}) \setminus (\cap_n O_{\epsilon_n} \setminus E)$ é differenza di misurabili perché $(\cap_n O_{\epsilon_n}) \setminus E \subset [\cap_n O_{\epsilon_n}] \setminus [\cup_n K_{\epsilon_n}] \Rightarrow L^N(\cap_n O_{\epsilon_n} \setminus E) = 0$ (dunque, A limitato e misurabile secondo Peano-Jordan \Rightarrow misurabile secondo Lebesgue).

AM5: Esercizi e complementi -I Settimana

Misura di Hausdorff. Dati $s \geq 0, \delta > 0, A \subset \mathbf{R}^n$ sia

$$H_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} (\text{diam } C_j)^s : A \subset \cup_{j=1}^{+\infty} C_j, C_j = \overline{C}_j, \text{diam } C_j \leq \delta \right\}$$

$$H^s(A) = \sup_{\delta > 0} H_\delta^s(A)$$

(i) Provare che H^s (misura di Hausdorff s-dimensionale) é misura boreliana.

(ii) $H^s(rA) = r^s H^s(A), \forall A \subset \mathbf{R}^n, \forall r > 0$

(iii) $H^s(A) < +\infty, t > s \Rightarrow H^t(A) = 0$ e $H^s(A) > 0, t < s \Rightarrow H^t(A) = +\infty$

Esercizio 1. Sia X un insieme .

(i) Per ogni $A \subset X$, sia $\mu(A) =$ numero di elementi di A , se A é un insieme finito, $\mu(A) = +\infty$ se A non é finito (μ é "misura che conta") . Provare che μ é una misura sull'insieme delle parti di X .

(i) Dato $X_0 \subset X$, sia $\delta_{X_0}(E) = 1$ se $E \cap X_0 \neq \emptyset, \delta_{X_0}(E) = 0$ se $E \cap X_0 = \emptyset$. Provare che δ_{X_0} è una misura su X e $\Sigma_\mu = \{E : X_0 \subset E \text{ op. } E \subset X_0^c\}$.

Esercizio 2. Dato X , sia Σ una σ -algebra di sottoinsiemi di $X, \mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$ misura, e sia $\hat{\mu}(E) = \inf \{ \sum \mu(A_j) : E \subset \cup A_j, A_j \in \Sigma \}$. Provare che

- (i) $\hat{\mu}$ è misura (esterna) su X , (ii) $\Sigma \subset \Sigma_{\hat{\mu}}$,
 (iii) $\hat{\mu}$ é Σ -regolare: $\forall A \subset X, \exists E \in \Sigma : A \subset E, \hat{\mu}(A) = \mu(E)$

Suggerimento: $E \in \Sigma, A \subset \cup_j A_j, A_j \in \Sigma \Rightarrow \sum_j \mu(A_j) \geq \hat{\mu}(A \cap E) + \hat{\mu}(A \setminus E) \dots$

Esercizio 3. Sia $A \subset \mathbf{R}, L^1(A) > 0$. Provare che esiste $E \subset A$ che non é L^1 -misurabile.

Suggerimento. Cominciare col provare che $Z_0 \subset Z, L^1(Z_0) > 0 \Rightarrow Z_0$ non é misurabile (Z é il noto esempio di insieme non misurabile..). Provare quindi che $0 < L^1(A \cap (Z + q_j))$ per qualche j

Esercizio 4. Mostrare che non é sempre vero che

$$E_j \subset \mathbf{R}, E_{j+1} \subset E_j, L^1(E_1) < +\infty \Rightarrow L^1(E_j) \rightarrow L^1(\cap_j E_j)$$

Suggerimento. Da $\cap_n \cup_{j \geq n} (Z + q_j) = \emptyset \dots$ ove Z é come sopra..