AM5: Tracce delle lezioni- VIII Settimana

DISEGUAGLIANZA DI YOUNG

Siano $\quad p > 1, \quad q, r \geq 1, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2. \qquad$ Allora

$$|\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,(g*h)(x)dx| = |\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} f(x)\,g(x-y)\,h(y)\,dxdy| \leq \|f\|_p\,\|g\|_q\,\|h\|_r$$

$\forall f \in L^p(\mathbf{R}^n), \quad g \in L^q(\mathbf{R}^n), \quad h \in L^r(\mathbf{R}^n).$ In particolare, se $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1$

allora $\qquad g \in L^q(\mathbf{R}^n), \quad h \in L^r(\mathbf{R}^n) \quad \Rightarrow \quad \|g*h\|_s \leq \|g\|_q\,\|h\|_r$

Prova. Se p', q', r' sono gli esponenti coniugati, allora

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{r'}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{p'}, \qquad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'} = 1$$

Dalla diseguaglianza di Holder generalizzata e quindi Fubini

$$|\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} f(x)g(x-y)h(y)dxdy| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} |f(x)|^{\frac{p}{r'}} \times |f(x)|^{\frac{p}{q'}} \times |g(x-y)|^{\frac{q}{p'}} \times |g(x-y)|^{\frac{q}{r'}} \times |h(y)|^{\frac{r}{p'}} \times |h(y)|^{\frac{r}{q'}} dxdy \leq$$

$$\leq \left(\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} |f(x)|^p |g(x-y)|^q dxdy\right)^{\frac{1}{r'}} \times \left(\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} |f(x)|^p |h(y)|^r dxdy\right)^{\frac{1}{q'}} \times$$

$$\times \left(\int_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} |h(y)|^r |g(x-y)|^q dxdy\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$\|f\|_p^{\frac{p}{r'}}\ \|g\|_q^{\frac{q}{r'}}\ \|f\|_p^{\frac{p}{q'}}\ \|h\|_r^{\frac{r}{q'}}\ \|h\|_r^{\frac{r}{p'}}\ \|g\|_q^{\frac{q}{p'}} = \|f\|_p\ \|g\|_q\ \|h\|_r$$

NOTA. La condizione $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$ é necessaria, in quanto la diseguaglianza deve essere invariante rispetto al cambio di scala $x' = tx, y' = ty$: il primo membro cambia per un fattore t^{-2n}, mentre il secondo cambia per un fattore $t^{-n(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r})}$.

Il caso limite: $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ Siano $\quad q, r \geq 1, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$ Allora

$$g \in L^q(\mathbf{R}^n), \quad h \in L^r(\mathbf{R}^n) \quad \Rightarrow \quad h*g \in C(\mathbf{R}^n) \quad \text{e} \quad \sup_{|x|\geq R} |h*g|(x) \to_{R\to+\infty} 0$$

Intanto, $\int |g(x-y)|\,|h(y)|dy \le \|g\|_q\,\|h\|_r \quad \forall x.$ Siano poi $g_\epsilon, h_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ tali che $\|g-g_\epsilon\|_q + \|h_\epsilon - h\|_r \le \epsilon.$ Da Holder

$$|(g*h)(x) - (g_\epsilon * h_\epsilon)(x)| \le |[(g-g_\epsilon)*h](x)| + |[g_\epsilon * (h-h_\epsilon)](x)| \le$$
$$\le \|g-g_\epsilon\|_q\,\|h\|_r + \|h-h_\epsilon\|_r\,\|g_\epsilon\|_q \le 2\epsilon(\|g\|_q + \|h\|_r)$$

Dunque $g_\epsilon * h_\epsilon \to_{\epsilon\to 0} g*h,$ uniformemente e siccome $g_\epsilon * h_\epsilon$ é chiaramente $C_0^\infty,$ allora $g*h$ é continua. Infine, che $g*h$ vada uniformemente a zero all'infinito segue di nuovo dal fatto che $g*h$ é limite uniforme di funzioni a supporto compatto.

Effetto regolarizzante della convoluzione. Sia $\int_{\mathbf{R}^n} |f| < \infty.$ Allora

(i) $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \Rightarrow f*g \in C^\infty(\mathbf{R}^n),$ $\qquad \frac{\partial}{\partial x_j}(f*g) = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}$

(ii) $\mathrm{supp}(f*g) \subset \mathrm{supp}\ f + \ \mathrm{supp}\ g$ $\quad$ ($\mathrm{supp}\ f$:= chiusura di $\{x : \ f(x) \neq 0\}$)

Basta mostrare, usando Lebesgue, che é lecita la derivazione sotto segno di integrale.

Nuclei regolarizzanti. Sia $0 \le \varphi$ sommabile in $\mathbf{R}^n$ tale che $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi = 1$. Sia $\varphi_\epsilon(x) ::= \epsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. Allora

$$\int |\varphi_\epsilon * f - f|^p \to_{\epsilon\to 0} 0 \quad \forall f \in L^p(\mathbf{R}^n)$$

Segue da $\int_{\mathbf{R}^n} |\varphi_\epsilon * f - f|^p(x)\,dx = \int |\int [f(x) - f(x-y)](\varphi_\epsilon(y))^{\frac{1}{p}}\,(\varphi_\epsilon(y))^{\frac{1}{q}}\,dy|^p\,dx$

$$\le \int \left(\int |f(x) - f(x-y)|^p \varphi_\epsilon(y) dy\right)\left(\int |\varphi_\epsilon(y)| dy\right) dx =$$

$$\int \left(\varphi(z) \int |f(x) - f(x-\epsilon z)|^p dx\right) dz \to_{\epsilon\to 0} 0 \quad \text{(convergenza dominata)}$$

Approssimazione mediante convoluzione. Siccome $f * \varphi_\epsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, abbiamo ottenuto che

ogni f sommabile é limite in media di funzioni C^∞
In effetti ogni f sommabile é limite in media di funzioni C_0^∞

Basta infatti prendere $f\,\chi_{B_{\frac{1}{\epsilon}}} * \varphi_\epsilon$:

$$\int |f\,\chi_{B_{\frac{1}{\epsilon}}} * \varphi_\epsilon - f| \le \int |(f\,\chi_{B_{\frac{1}{\epsilon}}} - f) * \varphi_\epsilon| + \int |f * \varphi_\epsilon - f| \to 0$$

perché $\int |f - f\,\chi_{B_{\frac{1}{\epsilon}}}| = \int_{|x| \ge \frac{1}{\epsilon}} |f| \to 0$ al tendere di ϵ a zero.

COMPATTEZZA IN $L^p(\mathbf{R}^N)$: IL TEOREMA DI FRECHET- KOLMOGOROV

Sia $p \geq 1$. Non é in generale vero che una successione limitata in $L^p(\mathbf{R}^N)$ ammette sottosuccessioni convergenti in L^p. Cioé, non é vero in generale che

$$f_n \in L^p(\mathbf{R}^N), \;\; \sup_n \|f_n\|_{L^p} < +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists f_{n_k} \quad \text{convergente in} \quad L^p$$

Ad esempio, se $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ e $f_n(x) := f_n(x+h_n)$, $|h_n| \to_n +\infty$, allora $f_n(x) \to_n 0 \;\; \forall x \in \mathbf{R}^N$ ma f_n non ha estratte convergenti (necessariamente a zero) in L^p perché $\|f_n\|_p \equiv \|f\|_p$. Analogamente , $f_n(x) := \epsilon_n^{\frac{N}{p}} f(\epsilon_n x)$, $\epsilon_n \to_n 0$ ha norma L^p costante e quindi non ha estratte convergenti a $f \equiv 0$ che é il limite puntuale delle f_n.

Al fine di individuare delle condizioni che assicurino la compattezza di f_n in L^p, cominciamo con l'osservare che

$$\int |f_n - f|^p \to_n 0 \quad \Rightarrow \quad \sup_n \int |f_n|^p < +\infty \quad \text{e}$$

$$\sup_n \int |f_n(x+h) - f_n(x)|^p dx \to_{|h|\to 0} 0 \qquad\qquad \sup_n \int_{|x|\geq r} |f_n|^p \to_{r\to+\infty} 0$$

La validitá di tali proprietá per ciascuna f_n é ben nota: il fatto che tali proprietá valgano uniformemente in n é facile conseguenza della convergenza L^p delle f_n. É sotto tali condizioni che una data f_n ha una estratta convergente in L^p.

Teorema (Frechet-Kolmogorov) . Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ aperto. Siano f_n misurabili in $L^p(\mathbf{R}^N)$ e tali che

(i) $\forall K \subset \Omega$ compatto $\exists c(K)$: $\qquad \sup_n \int_K |f_n|^p \leq c(K)$

(ii) $\forall K \subset \Omega$ compatto $\qquad \sup_n \int_K |f_n(x+h) - f_n(x)|^p dx \to_{|h|\to 0} 0$

Allora esistono f ed f_{n_k} tali che $\int_K |f_{n_k} - f|^p \to_k 0 \;\; \forall \;\; \forall K \subset \Omega$ compatto .
Se di piú

(iii) $\forall \epsilon > 0$, $\exists\; K_\epsilon \subset \Omega$ compatto e tale che $\qquad \sup_n \int_{\Omega\setminus K_\epsilon} |f_n|^p \leq \epsilon$

allora f_n ha una sottosuccessione convergente in $L^p(\Omega)$.

Prova. Sia, per semplicitá, $p = 1$. Nel seguito supporremo, come é lecito, che $f_n \equiv 0$ fuori di Ω. Il seguente Lemma descrive il ruolo delle ipotesi (i)-(ii).

Lemma . Sia $\varphi \in C_0^\infty(B_1),\ 0 \le \varphi \le 1,\ \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi = 1,\ \ \varphi_\epsilon = \epsilon^{-N}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. Sia $K \subset \Omega$ compatto, $\epsilon < dist(K, \partial\Omega)$. Allora

$$(i) \quad \Rightarrow \quad \exists c = c_e : \ \sup_{x\in K} |(f_n * \varphi_\epsilon)(x)| + \sum_{j=1}^N \left[\sup_{x\in K} |\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_\epsilon * f_n)(x)|\right] \le c_\epsilon \quad \forall n$$

$$(ii) \quad \Rightarrow \quad \sup_n \int\limits_K |f_n - (\varphi_\epsilon * f_n)| \to_{\epsilon\to 0} 0$$

Prova del Lemma. Sia $K^\epsilon := \{z = x + y : \ x \in K, \ |y| \le \epsilon\}$. Da $c(K^\epsilon) := \sup\limits_n \int\limits_{K^\epsilon} |f_n| < +\infty$ segue

$$|(\varphi_\epsilon * f_n)(x)| \le \|\varphi_\epsilon\|_\infty \int\limits_{|y|\le\epsilon} |f_n(x-y)|\, dy \le c(K^\epsilon)\, \|\varphi_\epsilon\|_\infty \qquad \forall x \in K$$

$$|\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi * f_n)(x)| = \left| \int\limits_{\mathbf{R}^N} f_n(y)\, \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_\epsilon(x-y)\, dy \right| \le c(K^\epsilon)\, \|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\|_\infty \quad \forall x \in K$$

Poi, $\sup_n \int\limits_K |f_n(x+h) - f_n(x)|\, dx \to_{|h|\to 0} 0 \quad \Rightarrow$

$$\int_K |f_n(x) - (\varphi_\epsilon * f_n)(x)| \le \int_K \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f_n(x-y) - f_n(x)| \varphi_\epsilon(x)\, dy \right) dx =$$

$$\int_K \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f_n(x-\epsilon z) - f_n(x)| \varphi(z)\, dz \right) dx =$$

$$= \int_{|z|\le 1} \left(\varphi(z) \int_K |f_n(x-\epsilon z) - f_n(x)|\, dx \right) dz \to_{\epsilon\to 0} 0$$

CONCLUSIONE. Fissato K sottoinsieme compatto di Ω, proviamo che

$$\exists n_k : \quad \int_K |f_{n_k} - f_{n_h}| \le \frac{1}{h} \qquad \forall k \ge h$$

Dalla seconda parte del Lemma segue che

$$\forall k, \quad \exists \epsilon_k, \ \ \epsilon_k \to_k 0 : \qquad \sup_n \int_K |f_n - (\varphi_k * f_n)| \le \frac{1}{k} \qquad (\varphi_k := \varphi_{\epsilon_k})$$

Dalla prima parte del Lemma segue che, per ogni ϵ, la successione $n \to \varphi_\epsilon * f_n$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Ascoli-Arzela in K. Esiste quindi una (prima) selezione di indici n_j^1 tale che $\varphi_1 * f_{n_j^1}$ converge uniformemente (e quindi in media) in K a una certa funzione g_1 , continua in K . Possiamo anche supporre che

$$\int_K |\varphi_1 * f_{n_j^1} - g_1| \leq 1 \qquad \forall j$$

Per la stessa ragione, esiste una (ulteriore) selezione di indici $(n_j^2) \subset (n_j^1)$ ed una funzione $g_2 \in C(K)$ tale che

$$\int_K |\varphi_2 * \ f_{n_j^2} - g_2| \leq \frac{1}{2} \qquad \forall j \qquad \text{ed anche} \qquad \int_K |\varphi_1 * f_{n_j^2} - g_1| \leq 1 \qquad \forall j$$

Iterando, troviamo, al k-esimo passo, una funzione continua (in K) g_k ed una (ulteriore) selezione di indici $(n_j^k) \subset (n_j^{k-1})$ tali che

$$\int_K |\varphi_k * f_{n_j^k} - g_k| \leq \frac{1}{k} \quad \forall j \qquad \text{ed anche} \qquad \int_K |\varphi_h * f_{n_j^k} - g_h| \leq \frac{1}{h} \quad \forall h \leq k, \quad \forall j$$

Ma allora, indicata $n_k := n_1^k,$ troviamo che $h \leq k \quad \Rightarrow \quad \int_K |f_{n_k} - f_{n_h}| \leq$

$$\leq \int_K |f_{n_k} - \varphi_h * f_{n_k}| + \int_K |\varphi_h * f_{n_k} - g_h| + \int_K |g_h - \varphi_h * f_{n_h}| + \int_K |\varphi_h * f_{n_h} - f_{n_h}| \leq \frac{4}{h}$$

Dunque, esistono f_{n_k} ed f tale che $\int_K |f_{n_k} - f| \to_k 0$ (ed anche $f_{n_k} \to f$ q.o. in K).

Siano infine $\Omega_j \subset K_j := \overline{\Omega_j} \subset \Omega_{j+1} \subset \Omega$ aperti tali che $\cup_j \Omega_j = \Omega$. Per quanto visto, esistono una (prima) selezione di indici n_i^1 e una funzione f^1 tale che $\int_{K_1} |f_{n_i^1} - f^1| \to_i 0$ ed esistono (ulteriori) selezioni di indici $(n_i^j) \subset (n_i^{j-1})$ e funzioni f^j tali che $\int_{K_j} |f_{n_i^j} - f^j| \to_i 0$. Siccome $(n_i^j) \subset (n_i^{j-1})$, $f^j = f^{j-1}$ quasi ovunque in K_{j-1}. Resta cosí definita una sottosuccessione (diagonale) $f_{n_j} := f_{n_j^j}$ ed una funzione misurabile $f :\equiv f^j$ in K_j tali che $\int_K |f_{n_j} - f| \to_j 0$ per ogni sottoinsieme compatto K di Ω, perché $K \subset \Omega_j$ definitivamente.

Per provare infine la seconda parte del teorema basta osservare che

$$\exists K_\epsilon : \quad \int_{\Omega \setminus K_\epsilon} |f| \leq \liminf_j \int_{\Omega \setminus K_\epsilon} |f_{n_j}| \leq \epsilon \quad \Rightarrow$$

$$\limsup_j \int_\Omega |f_{n_j} - f| \leq \limsup_j \int_{K_\epsilon} |f_{n_j} - f| + \limsup_j \int_{\Omega \setminus K_\epsilon} |f_{n_j} - f| \leq \ 2\,\epsilon$$

AM5: Esercizi e Problemi- VIII Settimana

Problema 1. Sia $0 \leq \varphi$ sommabile in $\mathbf{R}^n$ tale che $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi = 1$. Sia $\varphi_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. Allora

$$\int_{B_R} |\varphi_\epsilon * f - f\,|^p \to_{\epsilon\to 0} 0 \quad \forall f \in L^p_{loc}(\mathbf{R}^n), \quad \forall R > 0$$

ove $f \in L^p_{loc} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{|x|\leq R} |f|^p < +\infty \quad \forall R > 0.$

Problema 2. Sia f continua in $\mathbf{R}^n$, $\varphi \in C_0^\infty$. Provare che

(i) $f * \varphi(x) := \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\varphi(y)dy$ é definita in tutto $\mathbf{R}^n$ ed é una funzione C^∞.

(ii) $f * \varphi_\epsilon$ converge uniformemente sui compatti ad f.

Problema 3. Sia f sommabile in $\mathbf{R}^n$. Provare che

$$\int |f(x) - \frac{1}{L^n(B_r)} \int_{B_r(x)} f(y)dy\,|\,dx \;\to_{r\to 0} 0$$

Problema 4 Sia $f \in C(\mathbf{R}^N)$. Provare che

$$f(x) \to_{|x|\to+\infty} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists f_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N): \quad \sup_{x\in\mathbf{R}^N} |f_n(x) - f(x)| \to_{n\to+\infty} 0$$

Esercizio 1. Sia $\alpha \in [0,1)$. Sia $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}\chi_{(0,1]}$.

Provare che $f * f$ é continua sse $\alpha < \frac{1}{2}$.

Esercizio 2. Sia f sommabile in $\mathbf{R}^n$. Posto $f_n = f\,\chi_{\{|f(x)|\leq n\}}$, provare che

$$\int |g| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int |f_n * g - f * g| \to_n 0$$

Esercizio 3. Stabilire se é vero che

$$f \in C(\mathbf{R}^n),\; \varphi \in C_0^\infty \quad \Rightarrow \quad x \to \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\, g(y)dy \qquad \text{é sommabile}$$

AM5: Esercizi e Problemi- VIII Settimana

CENNI DI SOLUZIONE

Problema 2. Sia $supp\ \varphi \subset B_1$, $|x| \le R$. Allora

$$|(\varphi_\epsilon * f)(x) - f(x)| \le \int |f(x) - f(x-y)|\varphi_\epsilon(y)dy = \int \Big(\varphi(z) \int |f(x) - f(x - \epsilon z)|dx\Big) dz \le$$

$$\le \sup_{x,y \in B_{R+1},\ |x-y|\le\epsilon} |f(x) - f(y)| \to_{\epsilon\to 0} 0$$

per la uniforme continuitá di f in B_{R+1}.

Problema 3. $\int |f(x) - \frac{1}{volB_r}\int_{B_r(x)} f(y)dy|dx\ | \le$

$$\le \frac{1}{r^N volB_1}\int \Big(\int |f(x) - f(y)|\chi_{B_r(x)}(y)\,dy\Big)\,dx =$$

$$\frac{1}{r^N volB_1}\int \Big(\int |\ f(x) - f(x-z))|\ \chi_{B_1}(\frac{z}{r})\,dz\Big)\,dx =$$

$$= \frac{1}{r^N volB_1}\int \Big(\int |f(x) - f(x-r\xi)|\ \chi_{B_1}(\xi)\,r^N\,d\xi\Big)\,dx =$$

$$= \frac{1}{volB_1}\int \Big(\chi_{B_1}(\xi)\int |\ f(x) - f(x-r\xi)\ |dx\Big) d\xi \to_{r\to 0} 0$$

perché $\int |f(x) - f(x-r\xi)|dx \to_{r\to 0} 0$ e c ' é equidominatezza:

$$\chi_{B_1}(\xi)\int |f(x) - f(x-r\xi)|dx \le 2\|f\|_{L^1}\ \chi_{B_1}(\xi)$$

Problema 4.

$f \in C(\mathbf{R}^N)$, $f(x) \to_{|x|\to+\infty} 0$ $\Rightarrow$ f é uniformemente continua su tutto $\mathbf{R}^N$

e quindi, esattamente come nel Problema 2 si vede che ora

$$\sup_{\mathbf{R}^N} |(\varphi_\epsilon * f)(x)| \to_{\epsilon\to 0} 0$$

Sia ora $\chi_n := \chi_{|x|\le n}$. É

$\varphi_\epsilon * (f\chi_n) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ e $|(\varphi_{\frac{1}{n}} * (f(\chi_n - 1))(x)| \le \sup_{|y|\ge n} |f(y)| \le \epsilon$ se $n \ge n_\epsilon$

e quindi, per $n \ge n_\epsilon$, si ha

$$|(\varphi_{\frac{1}{n}} * (f\chi_n))(x) - f(x)| \le |(\varphi_{\frac{1}{n}} * (f(\chi_n - 1))(x)| + |(\varphi_{\frac{1}{n}} * f)(x) - f(x)|\ leq\epsilon \quad \forall x \in \mathbf{R}^N$$

Il viceversa é ovvio:

$$\sup_{\mathbf{R}^N} |f(x) - f_{n_\epsilon}(x)| \leq \epsilon, \quad supp \quad f_{n_\epsilon} \subset B_{R_\epsilon}, \quad |x| \geq R_\epsilon \quad \Rightarrow$$

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_\epsilon}(x)| + |f_{n_\epsilon}(x)| \leq \epsilon$$

Esercizio 1. Se $\alpha < \frac{1}{2}$ allora $f \in L^2$ e quindi $f * f$ é continua:

$$|(f*f)(x+h) - (f*f)(x)| \leq \int |f(x+h-y) - f(x-y)|\, |f(y)|\, dy \ \leq$$

$$\leq \ \|f\|_2 \left(\int |f(x+h-y) - f(x-y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow_{h \to 0} 0$$

Per discutere il caso $\alpha \geq \frac{1}{2}$, calcoliamo esplicitamente $f * f$.

$$x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \chi_{(0,1]}(y)\, \chi_{(0,1]}(x-y) = \chi_{(0,1] \cap [x-1, x)}(y) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad (f*f)(x) = 0$$

$$0 < x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad (f*f)(x) = \int_0^x \frac{dy}{(x-y)^\alpha y^\alpha} = \frac{1}{x^{2\alpha}} \int_0^x \frac{dy}{(1-\frac{y}{x})^\alpha \, (\frac{y}{x})^\alpha} =$$

$$= \ \frac{1}{x^{2\alpha-1}} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha \, t^\alpha} \rightarrow_{x \to 0^+} +\infty \quad \text{se} \quad \alpha > \frac{1}{2}$$

mentre

$$0 < x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad (f*f)(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \quad \text{se} \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

Dunque $f * f$ é discontinua in $x = 0$ se $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Questo é in effetti l'unico punto di discontinuitá:

$$x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad (f*f)(x) = \frac{1}{x^{2\alpha-1}} \int_{1-\frac{1}{x}}^{1} \frac{dt}{(1-t)^\alpha \, t^\alpha}$$

che é evidentemente continua.