AM5: Tracce delle lezioni- III Settimana

Convergenza quasi ovunque, in misura, in media.

Siano f_n, f funzioni misurabili in (X, Σ, μ). Diremo che f_n converge a f

quasi ovunque (q.o.) se $\quad \exists N \in \Sigma : \quad \mu(N) = 0 \ \text{ e } \ f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \notin N$

in misura se $\quad \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \to_n 0 \qquad \forall \epsilon > 0$

in media se $\quad f_n, f$ sono sommabili e $\quad \int_X |f_n - f| \, d\mu \to_n 0.$

Nota. Unicitá del limite: se f_n converge a f e a g q.o. (oppure in misura, oppure in media) allora $\quad \mu(\{x : |f(x) - g(x)| \neq 0\}) = 0$, (si dice $f = g$ q.o.)

Proposizione 1

(i) $\quad f_n \to f \quad$ in media $\quad \Rightarrow \quad f_n \to f \quad$ in misura

(ii) $\quad f_n \to f \quad$ in misura $\quad \Rightarrow \quad \exists n_k : \quad f_{n_k} \to f$ quasi ovunque

(iii) $\quad f_n \to f \quad$ q.o. $\quad \Rightarrow \quad f_n \to f$ in misura sugli insiemi di misura finita

Prova.

(i) Segue da: $\quad \int |f_n - f| \ \geq \ \epsilon \mu(\{|f_n - f| \geq \epsilon\})$

(ii) É $\quad g_n := |f_n - f| \to_n 0 \quad$ in misura, e quindi

$$\forall j, \quad \exists n_j : \quad \mu(\{g_n \geq \frac{1}{j}\}) \leq \frac{1}{2^j}, \quad \forall n \geq n_j.$$

Siccome $\cup_{j \geq k} \{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\}$ é una successione decrescente di insiemi di misura finita, con infatti $\mu(\cup_{j \geq k} \{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\}) \leq \sum_{j \geq k} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}$, risulta $\mu(\cap_k \cup_{j \geq k} \{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\}) = 0.$ Ma

$$x \notin \cap_k \cup_{j \geq k} \{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\} \quad \Rightarrow \quad \exists k : \quad j \geq k \quad \Rightarrow \quad g_{n_j}(x) < \frac{1}{j}$$

e quindi $\quad g_{n_j}(x) \to 0 \quad \forall x \notin \cap_k \cup_{j \geq k} \{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\}.$

(iii) Se $\quad N \in \Sigma$ é tale che $\quad g_n(x) := |f_n(x) - f(x)| \to_n 0 \quad \forall x \notin N, \quad$ é

$$N^c \subset \{x :\, g_n \to 0\} \; = \cap_j \, \cup_n \, \cap_{k \ge n} \{x :\, g_k \le \frac{1}{j}\}$$

e quindi $$\cup_j \cap_n \cup_{k \ge n} \{x : g_k > \frac{1}{j}\} \subset N$$

Per ipotesi, esiste un N siffatto con $\quad \mu(N) = 0, \quad$ e quindi

$$0 \; = \; \mu(\cup_j \, \cap_n \, \cup_{k \ge n} \{x \in A :\, g_k \; > \; \frac{1}{j}\}) \ge \mu(\cap_n \, \cup_{k \ge n} \; \{x \in A :\, g_k \; > \; \frac{1}{j}\}) \quad \forall j$$

e quindi, se $E \in \Sigma, \mu(E) < +\infty$, $\mu(\cup_{k \ge n} \{x \in E :\, g_k \; > \; \frac{1}{j}\}) \to_n 0 \;\; \forall j \quad$ e quindi

$$\mu(\{x \in E :\, g_n \; > \; \frac{1}{j}\}) \; \le \; \mu(\cup_{k \ge n} \{x \in A :\, g_k \; > \; \frac{1}{j}\}) \to_n 0 \quad \forall j$$

Nota. Unicitá del limite: dalla Prop. segue che se f_n converge a f q.o., od, indifferentemente, in misura od in media, ed f_n convege a g q.o., od, indifferentemente, in misura od in media, allora $\quad f = g$ q.o.

CONTROESEMPI

(i) La convergenza in misura (cosí come la convergenza q.o.) non implica la convergenza in media: $\quad X = \mathbf{R}$ con la misura di Lebesgue e $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$; f_n converge a zero in misura (e puntualmente), ma $\int_{\mathbf{R}} f_n = 1$.

(ii) La convergenza in misura non implica la convergenza q.o.: $\quad f_{n,k} = \chi_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}$, ove, dato $\;, n \in \mathbf{N}\;$, k va da 1 fino ad n, converge a zero in misura ma non converge in alcun punto (in ogni punto il massimo limite é 1 ed il minimo limite é zero).

(iii) La convergenza puntuale non implica la convergenza in misura: $\quad f_n = \chi_{[n,n+1]}$ converge a zero puntualmente (e, sugli intervalli limitati, anche in misura), ma non converge in misura su tutto $\mathbf{R}$.

Teorema 1 (Lebesgue) Siano f_n sommabili. Se

f_n é equidominata, esiste cioé g sommabile tale che $|f_n(x)| \le g(x)$ quasi per ogni x
f_n converge ad f q.o., oppure in misura

allora f é sommabile ed f_n converge a f in media.

Prova. Se f_n converge ad f q.o., esiste N tale che
$\mu(N) = 0$, $|f_n(x) - f(x)| \to 0 \ \ \forall x \notin N$ e $|f_n(x) - f(x)| \leq 2g(x) \ \ \forall x \notin N$.
E ció assicura che $\int |f_n(x) - f(x)| = \int |f_n(x) - f(x)|\chi_{N^c} \to 0$.

Se invece f_n converge ad f in misura, una sua sottosuccessione converge anche q.o. e quindi in media. Se f_n non convergesse in media a f, esisterebbero n_k ed $\epsilon > 0$ tali che $\int |f_{n_k} - f| \geq \epsilon$, mentre anche f_{n_k} al pari di f dovrebbe avere una sottosuccessione convergente a f in media.

CONVERGENZA IN MISURA E TEOREMA DI VITALI

Abbiamo visto che se f é sommabile, allora

$$(i) \qquad \forall\, \epsilon > 0, \quad \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad E \in \Sigma, \quad \mu(E) \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \int_E |f| \ \leq \ \epsilon$$

$$(ii) \qquad \forall \epsilon > 0, \quad \exists E_\epsilon \in \Sigma : \ \ \mu(E_\epsilon) < \infty \quad \text{e} \quad \int_{E_\epsilon^c} |f| \ \leq \ \epsilon$$

Se $\int |f_n - f| \to 0$, le proprietá (i)-(ii) valgono (banalmente) **uniformemente** in n:

$$(k) \qquad \forall\, \epsilon > 0, \quad \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad E \in \Sigma, \quad \mu(E) \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \sup_n \int_E |f_n| \ \leq \ \epsilon$$

$$(kk) \qquad \forall \epsilon > 0, \quad \exists E_\epsilon \in \Sigma : \quad \mu(E_\epsilon) < \infty \quad \text{e} \quad \sup_n \int_{E_\epsilon^c} |f_n| \ \leq \ \epsilon$$

Teorema di Vitali . Siano f_n sommabili e convergenti in misura ad f. Se valgono (k) e (kk), allora f é sommabile e $\int |f_n - f| \to 0$.

Prova. Dalla Prop. 1-(ii) e dal Lemma di Fatou segue che:

$\exists f_{n_k} \to_k f$ q.o. e quindi $\int_E |f| \ \leq \ \underline{\lim} \int_E |f_{n_k}| \leq \sup_n \int_E |f_n| \quad \forall E \in \Sigma$. Se

δ_ϵ, E_ϵ sono come in $(k)-(kk)$ e $A_{\epsilon,n} := \{x \in A_\epsilon : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{\mu(A_\epsilon)}\}$ per cui

$\mu(A_{\epsilon,n}) \leq \delta_\epsilon$ se $n \geq n_\epsilon$ ($f_n \to f$ in misura!) vediamo che f é sommabile, perché

$$\int |f| \leq \int_{A_\epsilon^c \cup A_{\epsilon,n}} |f| + \int_{A_\epsilon \setminus A_{\epsilon,n}} |f - f_n| + \int_{A_\epsilon \setminus A_{\epsilon,n}} |f_n| \leq 3\epsilon + \int_{A_\epsilon} |f_n| \quad \forall n \geq n_\epsilon$$

e, infine, $n \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow$

$$\int |f_n - f| = \int_{A_\epsilon^c \cup A_{\epsilon,n}} |f_n - f| + \int_{A_\epsilon \setminus A_{\epsilon,n}} |f_n - f| \leq 4\epsilon + \int_{A_\epsilon \setminus A_{\epsilon,n}} \frac{\epsilon}{\mu(A_\epsilon)} = 5\epsilon$$

NOTA. Nel Teorema di Vitali l'ipotesi 'f_n converge a f in misura' puó essere sostituita dalla 'f_n converge a f q.o., giacché la convergenza q.o. implica la convergenza in misura sull'insieme di misura finita A_ϵ.

COMPLETEZZA

Una successione di funzioni sommabili f_n soddisfa la condizione di Cauchy per la convergenza in media se

$$\forall \epsilon > 0\,, \qquad \exists n_\epsilon : \qquad n, m \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \int |f_n - f_m| \;\leq \epsilon \qquad (C)$$

Se f_n converge in media, f_n é necessariamente di Cauchy (i.e. soddisfa (C)). Viceversa, se f_n soddisfa (C) , allora f_n converge in media a una funzione sommabile f:

Teorema Se f_n é una successione di funzioni sommabili, allora f_n converge in media se e solo se soddisfa la condizione di Cauchy (C).

Dimostrazione. Dalla condizione di Cauchy:

$$\exists n_k : \quad \int |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \;\leq\; \frac{1}{2^k}$$

Posto $g_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$, dal Teorema di B. Levi otteniamo

$$\int \Big[\sum_k |g_k| \Big] d\mu \;=\; \sum_k \;\Big[\int |g_k|\, d\mu \Big] \;=\; \sum_k \frac{1}{2^k} \;<\; +\infty \qquad \text{cioé}$$

$$g \;:=\; \sum_k \;|g_k| \qquad \text{é sommabile e quindi finita q.o.,} \qquad \text{e quindi}$$

la serie $\sum_k g_k$ converge q.o., ovvero $f(x) := \lim f_{n_k}$ esiste q.o. Inoltre,

$$|f_{n_k}| \;\; \leq |f_1| + g \quad \text{e quindi} \qquad \int |f_{n_k} - f| \to 0 \quad \text{(convergenza dominata)}$$

Da (C): $\int |f_n - f| \leq \int |f_n - f_{n_k}| + \int |f_{n_k} - f| \leq \epsilon$ se $n, n_k \geq n_e$

NOTA. Dalla dimostrazione:

f_n di Cauchy $\Rightarrow$ $\exists$ f_{n_k} equidominata e convergente quasi ovunque.

Definizione di $L^1(\mu)$. $L^1(\mu) = \{[f] : \int |f| < \infty\}$, $[f] := \{g : g = f \;\; q.o.\}$

Possiamo riformulare i fatti mostrati dicendo che

$$\rightarrow \qquad \|f\| \;:= \int |f| \qquad \text{é una norma su} \qquad L^1(\mu)$$

$$\rightarrow \qquad (L^1, \|f\|) \qquad \text{é uno spazio di Banach}$$

SPAZI L^p

Sia μ misura su X, $p \geq 1$.

$$L^p \;=\; L^p(X,\mu) := \{f : X \to [-\infty, +\infty] \mid \; f \text{ é misurabile e } \int_X |f|^p \, d\mu \;<\; \infty\}$$

Siccome $\quad p \geq 1 \Rightarrow (\frac{|t|+|s|}{2})^p \;\leq\; \frac{|s|^p+|t|^p}{2} \quad \forall\, s, t \in \mathbf{R}, \quad$ é

$$f,\, g \in L^p \quad \Rightarrow \quad f + g \in L^p$$

e quindi, facilmente, L^p **é spazio vettoriale**. Nel seguito, non distingueremo L^p da L^p quozientato rispetto al sottospazio $N := \{f = 0 \;\, q.o.\}$.

$\rightarrow$ Se $X = \mathbf{N}$ e μ é la misura che conta, $l^p := L^p(X,\mu)$ é lo spazio delle successioni $a := (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ di potenza p-esima sommabile con norma $\|a\| = [\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p]^{\frac{1}{p}}$

DISEGUAGLIANZE di HOLDER, di MINKOWSKII .

Siano f, g misurabili. Se $p \geq 1$, allora

$$\left(\int |f + g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \;\leq\; \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \textbf{(Minkowskii)}$$

Se $\quad p, q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad$ (i.e. p, q **sono 'esponenti coniugati'**), allora

$$\int |f\, g| \;\leq\; \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \textbf{(Holder)}$$

Una elementare diseguaglianza di convessitá.

$$p,\, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \Rightarrow \quad s\, t \;\leq\; \frac{t^p}{p} + \frac{s^q}{q} \qquad \forall\; s,\, t \;\geq\; 0$$

Da $\quad \frac{d}{dr}(\frac{r^p}{p} - r + \frac{1}{q}) = r^{p-1} - 1 \quad$ segue che $r = 1$ é punto di minimo assoluto. Da $\frac{r^p}{p} - r + \frac{1}{q} = 0$ in $r = 1$, segue $r \;\leq\; \frac{1}{p}r^p + \frac{1}{q} \quad \forall r > 0$. Scrivendo (se $s \neq 0$) $r = \frac{t}{s^{q-1}}$ si ottiene la diseguaglianza voluta.

Adesso Holder segue subito scrivendo $t = \frac{|f(x)|}{(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}}$, $s = \frac{|g(x)|}{(\int |g|^p)^{\frac{1}{p}}}$ e integrando.

Minkowskii segue da Holder:

$$\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1 \quad \Rightarrow \quad |f+g|^p \;\leq\; |f+g|^{p-1}\; |f| + |f+g|^{p-1}\; |g|$$

$$\Rightarrow \quad \int |f+g|^p \;\leq\; \left(\int |f+g|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |f+g|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

COMPLETEZZA degli spazi L^p. Sia $p \geq 1$.

(i) $\|f\|_p := (\int_X |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}}$ é una norma su L^p.

(ii) L^p dotato di tale norma é uno **spazio di Banach**, ovvero

$$f_n \in L^p, \ \|f_n - f_m\|_p \to_{n,\, m \to \infty} 0 \ \Rightarrow \ \exists f \in L^p : \ \ \|f_n - f\|_p \to 0$$

Si prova esattamente come nel caso $p = 1$: sia $g_k := f_{n_k}$ tale che $\|g_{k+1} - g_k\|_p \leq \frac{1}{2^k}$. Posto $F_n := \sum_1^n |g_{k+1} - g_k|$, é $\|F_n\|_p \leq \sum_1^n \frac{1}{2^k} \leq 1 \quad \forall n$ e quindi $F(x) := \lim_n F_n$ é in L^p per il Teorema di Levi, e quindi

$$\sum_1^\infty |g_{k+1} - g_k| < +\infty \quad \text{q.o.}$$

$$f(x) := \lim_k [g_1 + (g_2 - g_1) + \ldots + (g_k - g_{k-1})] = \lim_k f_{n_k} \quad \text{esiste finito q.o.}$$

Inoltre $|f_{n_k}| \leq F + |g_1|$ e quindi $|f_{n_k}|^p$ é equidominata e quindi $\int |f_{n_k} - f|^p \to 0$.

Infine, essendo f_n di Cauchy in L^p, $\int |f_n - f|^p \to 0$.

DISEGUAGLIANZA di INTERPOLAZIONE . Siano $1 \leq p \leq q$. Allora

$$f \in L^p \cap L^q \ \Rightarrow \ f \in L^r \ \forall r \in [p, q] \ \text{ e } \ \|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \, \|f\|_q^{1-\theta}$$

ove $\theta \in [0, 1]$ é tale che $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

Infatti, $\frac{p}{\theta r}$ e $\frac{q}{(1-\theta)r}$ sono esponenti coniugati e quindi

$$\int |f|^r = \int |f|^{r\theta} \, |f|^{r(1-\theta)} \leq (\int |f|^p)^{\frac{r\theta}{p}} \, (\int |f|^q)^{\frac{r(1-\theta)}{q}}$$

DISEGUAGLIANZA di HOLDER GENERALIZZATA . Siano $f \in L^p, g \in L^q$. Allora

$$\frac{1}{r} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 \ \Rightarrow \ \|fg\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

Basta applicare Holder con esponenti $\frac{p}{r}$ e $\frac{q}{r}$:

$$\int |f|^r \, |g|^r \leq (\int |f|^p)^{\frac{r}{p}} \, (\int |g|^q)^{\frac{r}{q}}$$

AM5: Esercizi e complementi - III Settimana

Teorema di Egoroff.

Sia $\mu(X) < \infty$. Siano $0 \geq f_n$ misurabili, $f_n(x) \to 0 \ \ \forall x$. Provare che

$$\forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon \ \text{ misurabile } \ : \ \mu(A_\epsilon) \leq \epsilon \ \text{ e } \ f_n \to 0 \quad \text{uniformemente in} A \setminus A_\epsilon$$

Suggerimento. Provare che $\forall j, \epsilon, \ \exists n(\epsilon, j) : \ \mu(\cup_{n \geq n(\epsilon,j)} \{g_n \geq \frac{1}{j}\}) \leq \frac{\epsilon}{2^j}$ *e considerare* $A_\epsilon := \cup_j \cup_{n \geq n(\epsilon,j)} \{g_n \geq \frac{1}{j}\}$

Convergenza in misura, q.o., in media

Esercizio 1. Sia

$$f_n(x) = |\sin(k_n x + t_n)|^{p_n}, \ x \in (0, 2\pi), \ \ k_n \in \mathbf{N}, p_n \to +\infty$$

Provare che f_n converge a zero in misura.

Sugg. Confrontare $L^1(\{x : |\sin(k_n x + t_n)|^{p_n} \geq \epsilon\})$ *con* $L^1(\{x : |\sin x|^{p_n} \geq \epsilon\}$

Esercizio 2. Discutere convergenza puntuale, uniforme, in media, in misura:

$(i) f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \ x \in (0,1), \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \ x \in (1, +\infty)$

$(ii) f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \ x \in (0,1), \quad f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \ x \in (1, +\infty)$

$(iii) f_n(x) = \frac{n^2x^2}{n^4+x^2}, \ x \in (1, +\infty)$

$(iv) f_n(x) = \frac{nx}{(1+n^2x^4)\log(n+1)}$

Esercizio 3. Siano f_n, g misurabili in $\mathbf{R}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ per quasi tutti gli x. Provare che

$$L^1(\{g \geq \epsilon\}) < \infty \ \ \forall \epsilon > 0, \quad f_n \to 0 \, q.o. \Rightarrow f_n \to 0 \ \text{ in misura}$$

Suggerimento. $L^1(\{|f_n| \geq \epsilon\}) \leq L^1(\{|g(x)| \geq \epsilon\})$....

Esercizio 4. Sia $\Phi : \mathbf{N} \to \mathbf{Q} \cap [0,1]$ biiezione. Siano

$$\Phi(k) = \frac{m_k}{n_k}, m_k, n_k \quad \text{primi tra loro} \qquad f_k(x) = e^{-(m_k - n_k x)^2}, x \in [0,1]$$

Provare che f_k tende a zero in misura, mentre $\lim f_k(x)$ non esiste per alcun x.

Suggerimento. Trovare le x che soddisfano la diseguaglianza $(m_k - n_k x)^2 \le \log \frac{1}{\epsilon}$. Usare poi il fatto che per ogni x esistono razionali m_k, n_k tali che $|x - \frac{m_k}{n_k}| \le \frac{1}{n_k^2}$. Considerare a parte il caso x razionale.

Esercizio 5.

(i) Trovare f_n misurabili tali che $f_n \to 0$ in misura ma $\int |f_n| \ge 1$

(ii) Trovare f_n misurabili tali che $f_n \to 0$ q.o. ma $\int |f_n| \ge 1$

(iii) Trovare f_n misurabili tali che $f_n \to 0$ q.o. ma non in misura

(iv) Trovare $f_n : [0,2] \to \mathbf{R}$ tali che $f_n(x) \to 0\ \forall x$ ma non in misura
Suggerimento. $f_n = \chi_{\cup_{j \ge n}}(Z + q_j)$...

Esercizio 6 . Sia $\mu(X) < \infty$. Siano $f_n \ge 0$ funzioni sommabili. Provare che

$$\sup_n \int f_n < +\infty, \;\; f_n \to f \;\; q.o., \quad \int_X f_n \, d\mu \;\to\; \int_X f \, d\mu \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_{L^1} \to 0$$

Suggerimento: $\qquad A_{n,\epsilon} := \{x : |f_n(x) - f(x)| \ge \epsilon\} \quad \Rightarrow$
$\int |f_n - f| \le \int_{A_{n,\epsilon}} |f_n - f| + \epsilon\mu(X), \quad \circ(1) - \epsilon\mu(X) \le \int_{A_{n,\epsilon}} f_n \le \circ(1) + \epsilon\mu(X)$

Spazi L^p

Esercizio 1. Siano $p_i > 1$, $\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_l} = \frac{1}{p} \le 1$. Siano $f_1, \ldots, f_l$ misurabili. Provare che

$$\left(\int |f_1 \ldots f_l|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int |f_1|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \ldots \left(\int |f_l|^{p_l}\right)^{\frac{1}{p_l}}$$

Esercizio 2 . Data f Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^n$, $t > 0$, sia $f_t(x) = f(tx)$. Provare che

(i) f_t è misurabile, $\qquad$ (ii) $\quad f \in L^p \Rightarrow f_t \in L^p \quad$ e $\quad ||f_t||_p = t^{-\frac{n}{p}} ||f||_p$

Esercizio 3. Siano $f_n \in L^p(X)$ tali che $\sup_n \int_X |f_n|^p < +\infty$. Provare che $\liminf |f_n| \in L^p$, mentre può accadere che $\int \limsup |f_n| = +\infty$.

Esercizio 4. Sia $\mu(X) < +\infty$. Siano $1 \leq s < t$. Provare che

(i) $f \in L^t \quad \Rightarrow \quad f \in L^s$, e l'inclusione $L^t \subset L^s$ è stretta

(ii) l'inclusione $L^t \subset L^s$ è falsa se $\mu(X) = +\infty$.

Esercizio 5. Sia f misurabile. Provare che

(i) $\sup_{p\geq 1} \|f\|_p < +\infty \quad \Rightarrow \quad f \in L^\infty$

(ii) $f \in L^1 \cap L^\infty \quad \Rightarrow \quad f \in L^p \quad \forall p > 1$ e $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$

Esercizio 6. Sia f_n successione limitata in $L^p(\mathbf{R}^n)$, $p \geq 1$. Provare che

$$f_n \to f \quad q.o., \quad \int |f_n|^p \to \int |f|^p \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0$$

Convergenza in media, q.o., in misura: cenni di soluzione

Esercizio 6 . Sia $I := \int f$, $A_{n,\epsilon} := \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$. Intanto

$$\mu(X) < \infty, f_n \to f \quad q.o. \quad \Rightarrow \quad f_n \to f \quad \text{in misura} \quad \Rightarrow \quad \mu(A_{n,\epsilon}) \to_n 0$$

Quindi $\int_{A_{n,\epsilon}} f \to_n 0$ (assoluta continuitá dell'integrale) e quindi

$$\int |f_n - f| \leq \int_{A_{n,\epsilon}} |f_n - f| + \epsilon\mu(X) \leq 2\epsilon\mu(X) + \int_{A_{n,\epsilon}} f_n \quad \forall n \geq n_\epsilon. \quad \text{Ma} \quad \int_{A_{n,\epsilon}} f_n =$$

$$= I + \circ(1) - \int_{A^c_{n,\epsilon}} f_n \leq I + \circ(1) - \int_{A^c_{n,\epsilon}} (f - \epsilon) \leq \epsilon\mu(X) + \int_{A_{n,\epsilon}} f \leq 2\epsilon\mu(X) \quad \forall n \geq n_\epsilon$$

Esercizi sugli L^p: cenni di soluzione

Esercizio 2 . Se E é misurabile, allora $A \subset tE, \quad B \subset tE^c \quad \Rightarrow$

$$\frac{1}{t}A \subset E, \ \frac{1}{t}B \subset E^c \ \Rightarrow \ \mu(A \cup B) = t^n \mu(\frac{1}{t}A \cup B) = t^n[\mu(\frac{1}{t}A) + \mu(\frac{1}{t}B)] = \mu(A) + \mu(B)$$

e quindi tE é misurabile.

Se E é misurabile, $\chi_E(tx) = \chi_{\frac{1}{t}E}$ é misurabile e $\int \chi_E(tx)d\mu(x) = \mu(\frac{1}{t}E) = (\frac{1}{t})^n\mu(E) = t^{-n}\int \chi_E$.

Se $0 \leq f$ é misurabile e $0 \leq \varphi_j \leq \varphi_{j+1} \leq f$, allora

$$\int f^p(tx)d\mu(x) = \lim_j \int \varphi_j^p(tx)d\mu(x) = t^{-n}\int f^p$$

Esercizio 5. (i) Sia $\mu(\{x: \ |f(x)| \geq c\}) > 0$. Allora

$$\sup_{p\geq 1}(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} \geq (\int_{\{x:\,|f(x)|\geq c\}} |f|^p)^{\frac{1}{p}} \geq c\mu(\{x:\ |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} \ \Rightarrow \ \sup_{p\geq 1}(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} \geq$$

$$\geq c \limsup_{p\to+\infty} \mu(\{x: \quad |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} = c \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x: \quad |f(x)| \geq c\}) = 0$$

se $c > \sup_{p\geq 1}(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$ e quindi $\|f\|_\infty \leq \sup_{p\geq 1}(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$

(ii) $p > 1 \quad \Rightarrow \quad \int |f|^p = \int |f| \ |f|^{p-1} \leq \|f\|_1 \ \|f\|_\infty^{p-1}$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_p \leq \|f\|_1^{\frac{1}{p}} \ \|f\|_\infty^{\frac{p-1}{p}} \quad \Rightarrow \quad \limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$$

Poi, $c < \|f\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x: \quad |f(x)| \geq c\}) > 0$ ed allora

$$\|f\|_p \geq c\,\mu(\{x:\ |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} \ \Rightarrow \ \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq c \ \Rightarrow \ \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$$

Esercizio 6. Proviamo intanto che dal Lemma di Fatou segue che

$$f_n \to f \quad q.o., \quad \int |f_n|^p \to \int |f|^p \quad \Rightarrow \quad \overline{\lim_n} \int_E |f_n|^p \leq \int_E |f|^p \quad \forall E \quad \text{misurabile}$$

Infatti

$$\int |f|^p - \overline{\lim_n} \int_E |f_n|^p = \underline{\lim_n}[\int |f_n|^p - \int_E |f_n|^p] \geq \int_{E^c} |f|^p \ \Rightarrow \ \overline{\lim_n} \int_E |f_n|^p \leq \int_E |f|^p$$

Ció implica l'uniforme assoluta continuitá degli integrali:

$$\mu(E) \leq \delta_\epsilon \ \Rightarrow \ \sup_n \int_E |f_n|^p \leq \epsilon, \qquad \exists E_\epsilon \ \text{con} \ \mu(E_\epsilon) < +\infty : \quad \sup_n \int_{E_\epsilon^c} |f_n|^p \leq \epsilon$$

Siamo quindi nelle ipotesi del Teorema di Vitali, e quindi $\|f_n - f\|_p \to_n 0$.