AM5: Tracce delle lezioni- II Settimana

FUNZIONI MISURABILI. Siano X un insieme , $\Sigma \subset \mathcal{P}\ (X)$ sigma algebra . Una funzione $f : X \to [-\infty, +\infty]$ é misurabile se vale una delle (tra loro equivalenti) affermazioni

$$(i) \quad \{x \in X : f(x) \le c\} \in \Sigma \ \ \forall c \in \mathbf{R} \quad (ii) \quad \{x \in X : \ f(x) > c\} \in \Sigma \ \forall c \in \mathbf{R}$$

$$(iii) \quad \{f(x) < c\} \in \Sigma \ \forall c \in \mathbf{R} \quad (iv) \quad \{f(x) \ge c\} \in \Sigma \ \ \forall c \in \mathbf{R}$$

Nota. Se μ é **misura completa**, cioé $N_0 \subset N \in \Sigma$, $\mu(N) = 0 \Rightarrow N_0 \in \Sigma$, allora f misurabile, $\mu(\{x : g(x) \ne f(x)\}) = 0 \quad \Rightarrow \quad g$ é misurabile.

Esempi. χ_A, funzione caratteristica di un insieme A, ovvero $\chi_A(x) := 1 \quad \forall x \in A, \quad \chi_A(x) := 0 \quad \forall x \in A^c$ é misurabile se e solo se $A \in \Sigma$.

Sia $X = \mathbf{R}^N$ e Σ la classe dei boreliani. Se f é inferiormente/superiormente semicontinua (cioé $f^{-1}((-\infty, c])$ é chiuso/$f^{-1}((-\infty, c))$ é aperto, per ogni $c \in \mathbf{R}$) allora f é **(borel) misurabile**.

Proposizione 1. Siano $f,\ g : X \to (-\infty, +\infty)$ misurabili. Allora

(i) $tf+sg, t, s \in \mathbf{R}$, fg, $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}$, $|f|$ sono misurabili; $\frac{1}{f}$ é misurabile se $\mu(\{f = 0\}) = 0$.

(ii) f_n misurabili $\Rightarrow$ $\inf_n f_n(x)$, $\sup_n f_n(x)$, $\liminf_n f_n(x)$, $\limsup_n f_n(x)$ sono misurabili

Verifica di (i): La misurabilitá di tf, $\frac{1}{f}$ segue subito dalla definizione. Poi, $f + g$ é misurabile perché

$$\{f + g < c\} \quad = \quad \cup_{\{r,s \in \mathbf{Q},\ r+s<c\}}(\{f < r\} \cap \{g < s\}) \in \Sigma$$

Infatti, $f(x) + g(x) < c \quad \Rightarrow \quad f(x) < \frac{c}{2} + \frac{f(x)-g(x)}{2} \quad \Rightarrow \quad \exists \ r \in \mathbf{Q} : f(x) < r < \frac{c}{2} + \frac{f(x)-g(x)}{2}$. Analogamente, $\exists s \in \mathbf{Q} :$ $g(x) < s < \frac{c}{2} + \frac{g(x)-f(x)}{2}$ (ció prova "$\subset$"; l'altra inclusione é ovvia).

Si vede poi subito che f misurabile $\Rightarrow f^2$ é misurabile, e quindi $fg = \frac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4}$ é misurabile, e quindi $f^+ = f\chi_{\{f\ge0\}}$, $f^- = -f\chi_{\{f\le0\}}$, $|f| = f^+ + f^-$ sono misurabili

Verifica di (ii): $\{x : \ \inf_n f_n(x) \ge c\} \quad = \quad \cap_n\{x : \ f_n(x) \ge c\} \in \Sigma$, $\{x : \ \sup_n f(x \le c\} \quad = \quad \cap_n\{x : \ f_n(x) \le c\} \in \Sigma$, $\liminf_n f_n(x) = \sup_n[\inf_{k\ge n} f_k(x)]$, $\limsup_n f_n(x) = \inf_n[\sup_{k\ge n} f_k(x)]$.

Proposizione 2. Sia $f \geq 0$ misurabile. Allora

$$f(x) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\, \chi_{E_j}(x) \qquad \forall x \in X \qquad \text{ove (induttivamente)}$$

$E_1 := \{x : f(x) \geq 1\}$, $E_n := \{x : f(x) \geq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\chi_{E_j}}{j} + \frac{1}{n}\}$, $n \in N$.

Dimostrazione. Posto $g(x) := \sum_j \frac{1}{j}\chi_{E_j}$, proviamo che $f \equiv g$.

É $f(x) \geq g(x)$. Infatti:

$x \notin \cup_j E_j \quad \Rightarrow \quad g(x) = 0 = f(x)$

$x \in E_n \setminus \cup_{k\geq n+1} E_k \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\chi_{E_j}(x)}{j} + \frac{1}{n} \;\geq\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\chi_{E_j}(x)}{j} \;=\; g(x)$

$x \in E_{j_k}, j_k \to +\infty \;\Rightarrow\; f(x) \geq \sum_{j=1}^{j_k-1} \frac{\chi_{E_j}(x)}{j} \;\; \forall k \;\Rightarrow\; f(x) \geq \sum_{j}^{+\infty} \frac{1}{j}\chi_{E_j}(x) \;=\; g(x)$

É $f(x) \leq g(x)$. Infatti, $g(x) < +\infty \quad \Rightarrow$

$\exists j_k \to +\infty : \; x \notin E_{j_k} \;\Rightarrow\; f(x) \leq \sum_{j=1}^{j_k-1} \frac{\chi_{E_j}}{j} + \frac{1}{j_k} \leq g(x) + \frac{1}{j_k} \;\Rightarrow\; f(x) \leq g(x)$

FUNZIONI SEMPLICI. Sia μ misura su (X, Σ) ; ϕ misurabile si dice semplice se $\phi(X)$ é al piú numerabile. Si ha (rappresentazione "canonica"di ϕ):

$$\phi \;=\; \sum_{t\in[-\infty,+\infty]} t\chi_{\{\phi=t\}} \;=\; \sum_i t_i\chi_{A_i}, \quad A_i := \{\phi = t_i\} \in \Sigma \text{ disgiunti}, \quad \cup_i A_i = X$$

INTEGRALE DI UNA FUNZIONE SEMPLICE. Sia $\phi \geq 0$ semplice.

$$\int \phi \;=\; \int_X \phi\, d\mu \;:=\; \sum_t t\,\mu(\{\phi = t\}), \qquad (0 \times \infty := 0)$$

Nota. Siano $\phi = \sum_i t_i\chi_{A_i}$ (rappr. can.) $B_j \in \Sigma : \; B_i \cap B_j = \emptyset \;\; \forall i \neq j$. Allora

(i) $\cup_j B_j = X \;\Rightarrow\; \sum_i t_i\chi_{A_i} = \sum_{ij} t_i \; \chi_{A_i\cap B_j}$, $\quad \int_X \phi = \sum_{ij} t_i\mu(A_i \cap B_j)$

(ii) $\int_X \phi = 0 \;\Leftrightarrow\; \mu(\{\phi \neq 0\}) = 0$ (diremo che $\phi = 0$ **quasi ovunque (q.o.)**)

(iii) $\mu(N) = 0 \;\Rightarrow\; \int \phi\chi_{N^c} = \sum_j t_j\mu(E_j \cap N^c) = \sum_j t_j\mu(E_j) = \int \phi$

Proposizione 3. Siano $\phi, \; \psi \geq 0$ semplici. Allora

$$(i)\;\; \phi \leq \psi \Rightarrow \int \phi \leq \int \psi \qquad (ii)\;\; \int \phi + \psi \;=\; \int \phi \;+\; \int \psi, \;\; \int t\phi \;=\; t\int \phi, \;\; \forall t \geq 0$$

INTEGRALE DI UNA FUNZIONE MISURABILE NON NEGATIVA.

Sia $f \geq 0$ misurabile. Definiamo

$$\int f \ := \ \int_X f \, d\mu \ := \sup\{\int \phi : \quad 0 \ \leq \ \phi \ \leq \ f, \quad \phi \text{ semplice}\}$$

Nota. Per $f = \phi$ semplice, le Definizioni 2 e 3 coincidono.

Proposizione 4. Siano $f \leq g$ misurabili e non negative. Allora $\int f \leq \int g$

Nota. (i) $\int f = 0 \ \Rightarrow \ \mu(\{f \neq 0\} = 0$. Infatti: $\int f = 0, \ \phi \leq f \ \Rightarrow$ $\int \phi = 0 \Rightarrow \ \phi = 0$ q.o.. Dalla Prop. 2: $\exists \phi_j \leq f, \ \phi_j \to f$ e quindi $f = 0$ q.o..

(ii) $\mu(N) = 0 \ \Rightarrow \ \int f \, \chi_{N^c} = \int f$. Infatti, $\int f \chi_{N^c} \leq \int f$ mentre $\phi \leq f \ \Rightarrow \ \int \phi = \int \phi \, \chi_{N^c} \ \leq \ \int f \, \chi_{N^c} \ \Rightarrow \ \int f \ \leq \ \int f \, \chi_{N^c}$

Teorema di Beppo Levi (o della convergenza monotona)

Siano f_n funzioni misurabili, tali che $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \ \forall n \in \mathbf{N}, \ \forall x$. Allora

$$\lim_{n \to +\infty} \int f_n = \int \lim_{n \to +\infty} f_n$$

Dimostrazione. Posto $f(x) := \lim_n f_n(x)$, proviamo che $\lim \int f_n \ \geq \ \int f$,

ovvero $$0 \leq \phi \leq f, \quad \phi \quad \text{semplice} \quad \Rightarrow \quad \int \phi \leq \lim \int f_n$$

Posto $E := \{x : \ \phi(x) = +\infty\}$, se $\mu(E) > 0$, allora $\lim \int f_n = +\infty$. Infatti,

$$E_n^M := \{x \in E : \ f_n(x) \geq M\} \subset E_{n+1}^M \,, \qquad \cup_n E_n^M = E \qquad \forall \ M > 0$$

perché $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall x, n$ e $f_n(x) \to +\infty \quad \forall x \in E$. Quindi,

$$\int f_n \geq \int f_n \chi_{E_n^M} \geq M \mu(E_n^M) \ \Rightarrow \ \lim \int f_n \ \geq \ M \mu(E) \quad \forall M > 0$$

Sia quindi $\phi = \sum_j t_j \chi_{E_j} \leq f$, $t_j < +\infty \ \forall j$. Allora, $0 < t < 1, \ \varphi(x) > 0 \ \Rightarrow$ $\lim_n f_n(x) > t\varphi(x) \ \Rightarrow \ A_n^t := \{x : \ f_n(x) \geq t\varphi(x)\} \subset A_{n+1}^t$ e $\cup_n A_n^t = X \ \Rightarrow$

$$\int f_n \ \geq \ \int f_n \chi_{A_n^t} \ \geq \ t \int \varphi \chi_{A_n^t} \geq t \sum_{j=1}^k t_j \mu(A_n^t \cap E_j) \to t \sum_{j=1}^k t_j \mu(E_j) \quad \forall k \ \Rightarrow$$

$$\lim \int f_n \geq t \int \phi \quad \forall t < 1 \ \Rightarrow \ \lim \int f_n \geq \int \phi$$

Nota. Si puó supporre $0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \notin Z$, $\mu(Z) = 0$. Basterá sostituire alle f_n le $f_n \chi_Z$.

Corollario. Siano f, g, f_j funzioni misurabili non negative, $t \ge 0$. Allora

$$(i) \quad \int f + g = \int f + \int g, \quad \int tf = t \int f \quad \forall t \ge 0$$

$$(ii) \quad \int \sum_1^\infty f_j \; = \; \sum_1^\infty \int f_j$$

(i) Dalla Proposizione 2: $\exists \varphi_j \le f$, $\psi_j \le g$ successioni crescenti di funzioni semplici non negative tali che $\varphi_j \to f$, $\psi_j \to g$. Da Beppo Levi, segue che

$$\int f + g = \lim_j \int \varphi_j + \psi_j = \lim(\int \varphi_j + \int \psi_j) = \int f + \int g$$

(ii) $\sum_1^n f_j \to \sum_1^\infty f_j$ in modo crescente implica

$$\sum_1^\infty \int f_j = \lim_n \sum_1^n \int f_j = \lim_n \int \sum_1^n f_j = \int \lim_n \sum_1^n f_j = \int \sum_1^\infty f_j$$

Il Lemma di Fatou. $\quad f_n \ge 0$ misurabili $\quad \Rightarrow \quad \underline{\lim} \int f_n \ \ge \ \int \underline{\lim}\, f_n$

Prova: $\int f_n \ \ge \ \int \inf_{k \ge n} f_k \ \Rightarrow \ \underline{\lim} \int f_n \ \ge \ \underline{\lim} \int \inf_{k \ge n} f_k$ e, siccome $\inf_{k \ge n} f_k$ converge in modo crescente a $\underline{\lim}\, f_n$, dal Teorema di B. Levi segue $\lim \int \inf_{k \ge n} f_k \ = \ \int \underline{\lim}\, f_n$.

Il teorema di Lebesgue (o della convergenza dominata).

Siano $f_n \ge 0$ funzioni misurabili convergenti puntualmente a zero . Allora

$$\exists \ g \ge 0 \text{ misurabile : } \int_X g < +\infty \quad \text{e} \quad f_n(x) \ \le \ g(x) \ \ \forall n, \qquad \Rightarrow \quad \int f_n \to 0$$

Prova. Sia $h_n(x) = g(x) - f_n(x)$. É $\int h_n + \int f_n = \int g < +\infty$. Da Fatou:

$$\int g - \overline{\lim} \int f_n = \underline{\lim}\, [\int g - \int f_n] = \underline{\lim} \int h_n \ \ge \ \int g \quad \text{e cioé} \quad 0 \ge \overline{\lim} \int f_n \le 0$$

Nota. L'ipotesi di 'equidominatezza' é essenziale.

Ad esempio, $\chi_{[n,n+1]}(x) \to 0 \ \ \forall x \in \mathbf{R}$ ma $\int_{\mathbf{R}} \chi_{[n,n+1]} = 1 \quad \forall n$.

Un altro esempio é dato dai **cambiamenti di scala** . Se $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$, sia $f_n(x) := n^N f(nx)$. Siccome $\int_{\mathbf{R}^N} n^N \chi_E(nx)\,dx = n^N L^N(\frac{1}{n}E) = L^N(E)$ é $\int_{\mathbf{R}^N} f_n = \int_{\mathbf{R}^N} f$. Se allora, ad esempio, $f \in C_0(\mathbf{R}^N)$, si ha $f_n(x) \to 0 \quad \forall x \neq 0$ ma $\int_{\mathbf{R}^N} f_n = \int_{\mathbf{R}^N} f$.

SOMMABILITÁ. f misurabile si dice sommabile se $\int |f| < \infty$.

In tal caso $\int_X f := \int_X f^+ - \int_X f^-$.

Proposizione 5. Siano f, g sommabili, $t, s \in \mathbf{R}$. Allora

(i) $tf + sg$ é sommabile e $\int tf + sg = t\int f + s\int g$

(ii) $f \leq g, \Rightarrow \int f \leq \int g$. In particolare, $|\int f| \leq \int |f|$

(iii) $\int |f| = 0 \Leftrightarrow \{f \neq 0\}$ ha misura nulla (f é nulla q. o.)

(iv) $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$

(v) $\{|f| \neq 0\}$ é $\sigma-$**finito**, cioé

esistono E_j misurabili e di misura finita tali che $\{|f| \neq 0\} \subset \cup_j E_j$

Prova di (i). $(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) \Rightarrow$

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+ \qquad \Rightarrow$$

$$\int (f+g)^+ + \int f^- + \int g^- = \int (f+g)^- + \int f^+ + \int g^+ \qquad \Rightarrow$$

$$\int f + g = \int (f+g)^+ - \int (f+g)^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- = \int f + \int g$$

Prova di (iii). φ indica una funzione semplice: $\int |f| = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (0 \leq \varphi \leq |f| \Rightarrow \int \varphi = 0) \Leftrightarrow (0 \leq \varphi \leq |f| \Rightarrow \mu(\{\varphi \neq 0\} = 0) \Leftrightarrow \mu(\{|f| \neq 0\} = 0$$

Prova di (iv). $\int |f| \geq \int |f| \;\; \chi_{\{|f| \geq n\}} \geq n\,\mu(\{|f| \geq n\}) \Rightarrow$

$$\mu(\{|f| = +\infty\}) \leq \mu(\{|f| \geq n\}) \leq \frac{1}{n}\int |f| \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Prova di (v). $\{f \neq 0\} = \cup_n \{|f| \geq \frac{1}{n}\}$ e $\int |f| \geq \int |f| \;\; \chi_{\{|f| \geq \frac{1}{n}\}} \geq \frac{1}{n}\mu(\{|f| \geq \frac{1}{n}\})$.

Definizione. Se f é sommabile ed E é misurabile, $\int\limits_E f := \int\limits_X f\,\chi_E$

Proposizione 6. Sia f sommabile. Allora

(i) $A \subset B$, A, B misurabili $\Rightarrow \int\limits_A |f| \leq \int\limits_B |f|$

(ii) $\int\limits_{\{f \geq c\}} f \geq c\ \mu(\{f \geq c\})\ \ \forall c$

(iii) $(\inf_A f)\ \mu(A) \leq \int_A f \leq (\sup_A f)\ \mu(A)$

(iv) $A_j \in \Sigma,\ A_i \cap A_j = \emptyset\ \ \forall\, i \neq j \ \Rightarrow\ \int_{\cup_j A_j} f = \sum_j \int_{A_j} f$

(v) $A_j \in \Sigma,\ A_j \subset A_{j+1}\ \forall j \ \Rightarrow\ \int_{A_j} f \to \int_{\cup_j A_j} f$

(vi) $A_j \in \Sigma,\ A_{j+1} \subset A_j\ \forall j \ \Rightarrow\ \int_{A_j} f \to \int_{\cap_j A_j} f$

Prova di (iv)-(v)-(vi). $A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall\, i \neq j \ \Rightarrow\ \chi_{\cup_j A_j} = \sum_j \chi_{A_j} \ \Rightarrow\ f\,\chi_{\cup_j A_j} = \lim_n \sum_{j=1}^n f\,\chi_{A_j}$ e $|\sum_{j=1}^n f\ \chi_{A_j}| \leq |f|$. Dal teorema di Lebesgue,

$$\int_{\cup_j A_j} f = \int f\chi_{\cup_j A_j} = \int \lim_n \sum_{j=1}^n f\,\chi_{A_j} = \lim_n \sum_{j=1}^n \int_{A_j} f = \sum_{j=1}^\infty \int_{A_j} f$$

Analogamente, $\chi_{A_j} \to \chi_{\cup_j A_j},\quad \chi_{A_j} \to \chi_{\cap_j A_j},\quad |f\chi_{A_j}| \leq |f| \quad \Rightarrow$

$$\int_{\chi_{A_j}} f = \int f\chi_{A_j} \to \int f\chi_{\cup_j A_j} = \int_{\chi_{\cup_j A_j}} f \quad \text{e} \quad \int_{\chi_{A_j}} f = \int f\chi_{A_j} \to \int f\chi_{\cap_j A_j} = \int_{\chi_{\cap_j A_j}} f$$

Assoluta continuitá dell'integrale: Sia f sommabile. Allora

$$(i) \quad \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\ \delta_\epsilon > 0:\ \mu(A) \leq \delta_\epsilon \ \Rightarrow\ \int_A |f| \leq \epsilon$$

$$(ii) \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists A_\epsilon:\ \mu(A_\epsilon) < \infty \quad \text{e} \quad \int_{A_\epsilon^c} |f| \leq \epsilon$$

Prova. (i) Per assurdo: $\exists \epsilon_0 > 0,\ \exists A_j$ tali che $\mu(A_j) \leq \frac{1}{2^j}$ e $\int_{A_j} |f| \geq \epsilon_0$. Se $B := \cap_n \cup_{j \geq n} A_j$, risulta $\mu(B) = 0$ e $\int_B |f| = \lim_n \int_{\cup_{j\geq n} A_j} |f| \geq \epsilon_0$, contraddizione.

(ii) É $\{|f| > 0\} = \cup A_n,\ A_n := \{|f| \geq \frac{1}{n}\}$, $\mu(A_n) < \infty,\ \int |f| = \lim \int_{A_n} |f|$. Dunque, $\exists n_\epsilon :\quad \epsilon + \int_{A_{n_\epsilon}} |f| \geq \int |f| = \int_{A_{n_\epsilon}} |f| + \int_{A_{n_\epsilon}^c} |f|$.

AM5-II Settimana: Esercizi e complementi

Funzioni misurabili e sommabilità

Una Formula di rappresentazione. Sia $f \geq 0$ misurabile in (X, Σ, μ). Provare che $t \to \mu(\{f > t\})$ é Riemann integrabile in $[0, M]$ $\forall M > 0$ e che

$$\int_X f \, d\mu \;=\; \int_0^\infty \mu(\{f > t\}) \, dt$$

Esercizio 1. Provare che f misurabile $\Rightarrow f^{-1}(B) \in \Sigma \quad \forall B \subset \mathbf{R}$ Boreliano.

Esercizio 2. Sia f_n una successione di funzioni misurabili. Provare che l'insieme $\{x : \exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\}$ è misurabile.

Funzioni misurabili, sommabili secondo Lebesgue in $\mathbf{R}^N$.

Teorema di Lusin. Sia $A \subset \mathbf{R}^N$ Lebesgue misurabile e di misura finita, f misurabile. Allora

$$\forall \epsilon > 0, \;\exists K_\epsilon \subset A \text{ compatto } : L^N(A \setminus K_\epsilon) < \epsilon \text{ e } \; f_{|K_\epsilon} \text{ é continua}$$

Nel seguito risulteranno utili i seguenti: **Insieme di Cantor, funzione di Cantor**

Dato un intervallo chiuso $I = [a, b]$, l'intervallo aperto $J := (a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3})$ é "intervallo centrale", $I_1 = [a, a + \frac{b-a}{3}]$, $I_2 = [b - \frac{b-a}{3}, b]$ sono i "restanti". Iterando, a partire da $I_0 = [0, 1]$ l'operazione di "selezione" dell'intervallo centrale, si trova

$$[0,1] = O \cup C, \qquad O := \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{2^{n-1}} J_{nj}, \qquad C := \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{2^n} I_{nj}$$

ove J_{nj}, I_{nj} sono intervalli aperti (risp. chiusi) di lunghezza $\frac{1}{3^n}$, per cui

$$L^1(\cup_{j=1}^{2^n} I_{nj}) = (\frac{2}{3})^n, \qquad L^1(C) = 0, \qquad L^1(O) = 1$$

L'insieme C é **"insieme di Cantor"**.

Sia
$$g_n(t) = (\frac{3}{2})^n \sum_1^{2^n} \chi_{I_{nj}}, \qquad f_n(x) = \int_0^x g_n(t) dt$$

Da $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall x \in [0,1])$ segue che f_n converge uniformemente, diciamo ad f.

Tale funzione é detta **funzione di Cantor**. Ecco alcune delle sue proprietá:

f é non decrescente, $f(0) = 0, f(1) = 1$, $f \equiv cost.$ in $J_{nj} \quad \forall \ n, j$

$f(O) = \{ \frac{k}{2^n} : \ k, n \in \mathbf{N} \}$. Dunque $f(O)$ é numerabile e $L^1(f(O)) = 0$

Dunque $L^1(f(C)) = 1$ (in particolare, C non é numerabile).

Esercizio 3. Sia $g(x) = \frac{x+f(x)}{2}$, $x \in [0,1]$, f funzione di Cantor.

Provare che g ha inversa continua e che $L^1(g(C)) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ localmente Lipschtziana. Provare che f trasforma insiemi di misura (di Lebesgue) nulla in insiemi di misura nulla.

Mostrare con un esempio che le funzioni continue non hanno, in generale, questa proprietà.

Esercizio 5. Provare la falsitá della seguente affermazione

f misurabile $E \subset \mathbf{R}$ Lebesgue misurabile $\Rightarrow$ $f(E)$ é Lebesgue misurabile.

Suggerimento. Se f é la funzione di Cantor, prendere $A \subset f(C)$ non misurabile (perché esiste?)...

Esercizio 6. Provare la falsitá della seguenti affermazioni

(i) f misurabile $E \subset \mathbf{R}$ Lebesgue misurabile $\Rightarrow f^{-1}(E)$ é Lebesgue misurabile.

Suggerimento. Sia $f = g^{-1}$, g come nell'esercizio 3 ed $E = g^{-1}(A)$, $A \subset g(C)$ non misurabile.

(ii) $L^1(E) = 0 \ \Rightarrow \ E$ é boreliano

(iii) L^1, ristretta alla σ-algebra dei boreliani, é misura completa

Esercizio 7. Siano f, g Lebesgue misurabili in $\mathbf{R}$. Provare che

$$g^{-1}(B) \text{ é boreliano se } B \text{ é boreliano} \Rightarrow g \circ f \text{ é misurabile}$$

e che la implicazione é falsa se g é soltanto misurabile.

Esercizio 8. Provare che ogni funzione monotona di $\mathbf{R}$ in se' é misurabile.

Esercizio 9. Sia $B := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Calcolare, usando l'esercizio 3

$$I_p = \int_{\mathbf{R}^n} ||x||^{-p}\chi_B \qquad\qquad J_p = \int_{\mathbf{R}^n} ||x||^{-p}\chi_{B^c}$$

e concludere che

$$I_p < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad p < n, \qquad\qquad J_p < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad p > n$$

Esercizio 10. Sia f Lebesgue sommabile in $\mathbf{R}^N$, $f_h(x) := f(x-h)$, $h \in \mathbf{R}^N$. Provare che

$$\int_{\mathbf{R}^N} f_h(x)dx \;=\; \int_{\mathbf{R}^N} f(x)dx$$

Suggerimento. Provarlo dapprima per le funzioni semplici..

Esercizio 11. Sia f sommabile in $\mathbf{R}$. Provare che

(i) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k)$ converge assolutamente quasi per ogni $x \in \mathbf{R}$

(ii) $g := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k)$ è 1-periodica e sommabile in $[a,b]$ $\forall a < b$

Suggerimento. Considerare $\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbf{R}} f_k\chi_{[0,1]}$, $f_k(x) := f(x+k)$

Esercizio 12. Provare che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(\cos nx)^{n^4}$ converge quasi per ogni $x \in [-\pi,\pi]$ e diverge in un insieme denso in $[-\pi,\pi]$.

Suggerimento. Considerare $\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos nx)^{n^4}dx$

Esercizio 13. Sia $n \to r_n$ biiezione di $\mathbf{N}$ su $\mathbf{Q}$.

Provare che $\sum_n \frac{1}{2^n\sqrt{|x-r_n|}} \;<\; \infty$ per quasi tutti gli $x \in \mathbf{R}$.
Suggerimento: Considerare $\int_a^b (\sum_n \frac{1}{2^n\sqrt{|x-r_n|}})$ $a < b$.

Esercizio 14. Sia f misurabile e limitata in $\mathbf{R}^N$. Provare che

(i) $\int_{\mathbf{R}^N} |f| < +\infty$ se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} L^N(\{x : |f(x)| \;>\; \frac{1}{2^n}\}) < +\infty$

Provare con un controesempio che l'implicazione $\Leftarrow$ è in generale falsa se f non si assume limitata.

Esercizio 15. Sia f misurabile e limitata in $\mathbf{R}^N$. Provare che

(ii) $\int |f| < +\infty \Rightarrow \sum_n L^N(\{|f| > n\}) < \infty$

Si puó prescindere dall'ipotesi di limitatezza? É vero il viceversa?

Esercizio 16. Sia f misurabile in $\mathbf{R}^N$ e nulla fuori di una palla. Provare che

$\int_{\mathbf{R}^N} |f| < +\infty$ se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n L^N(\{x : |f(x)| \geq 2^n\}) < +\infty$

Provare con un controesempio che l'implicazione $\Leftarrow$ è in generale falsa se f non si assume a supporto compatto.

Esercizio 17. Sia μ misura su X, $E \subset X$ misurabile, $f : X \to \mathbf{R}$ misurabile, $p > 0$. Provare che

(i) $\mu(\{|f| \geq t\}) \ \leq \ \frac{1}{t^p} \int |f|^p$

(ii) $\int |f|^p < \infty \ \Rightarrow \ \mu(\{|f| \geq t\}) \ = \ \circ(\frac{1}{t^p})$

Provare con un esempio che $\mu(\{|f| \geq t\}) \ = \ \circ(\frac{1}{t^p})$ non implica $\int |f|^p < \infty$.

Suggerimento. Considerare $f(x) = \frac{1}{|x \log x|} \chi_{(0,\frac{1}{e})}$.

Esercizio 18. Siano f_n misurabili, $0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ per ogni n e q.o. x.
Provare che $\quad \exists n : \quad \int f_n < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int f_n \to \int \lim f_n$
e che l'ipotesi $\quad \exists n : \ \int f_n < +\infty \quad$ é essenziale.

Esercizio 19. Provare che $\quad f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad \int |f| \leq \sup \int |f_n|$

Esercizio 20. Sia μ la misura che conta su un certo insieme X. Provare che

$$(i) \quad \int_X |f| \, d\mu \ = \ \sup\{\sum_{\alpha \in A} |f(\alpha)| : \quad A \subset X, \quad A \quad \text{finito}\}$$

$$(ii) \quad \int_X |f| \, d\mu < +\infty \quad \Rightarrow \quad \{x : \ f(x) \neq 0\} \quad \text{é al piú numerabile}$$

Esercizio 21. Provare che se $\sum f_n(x)$ converge quasi per ogni x ed esiste g sommabile tale che $|\sum_1^n f_j(x)| \leq g(x)$ quasi per ogni x, allora $\sum f_n$ è sommabile e $\int \sum f_n = \sum \int f_n$.

CENNI DI SOLUZIONE

Prova della Formula di rappresentazione . Sia $\varphi = \sum_{j=1}^{n} t_j \chi_{E_j}$, $0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n$. Allora

$\{x : \varphi(x) > t\} = \cup_{\{j:\ t_j > t\}} E_j$ e quindi $\int\limits_0^{\infty} \mu(\{\varphi > t\})dt =$

$$= t_1 \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j) + (t_2 - t_1) \sum_{j=2}^{n} \mu(E_j) + \ldots + (t_n - t_{n-1})\mu(E_n) = \sum_{j=1}^{n} t_j \mu(E_j) = \int \varphi$$

Poi, se $\varphi_n \to f$, $\varphi_n \le \varphi_{n+1} \le f$, é $\{f > t\} = \cup_n \{\varphi_n > t\}$ unione crescente, e quindi $\mu(\{\varphi_n > t\}) \to \mu(\{f > t\})$ e quindi, per Beppo Levi,

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X \varphi_n d\mu = \lim_n \int\limits_0^{\infty} \mu(\{\varphi_n > t\})dt = \int\limits_0^{\infty} \mu(\{f > t\})dt$$

Esercizio 1 Osservare che la preimmagine di un aperto é misurabile (ogni aperto in $\mathbf{R}$ é unione numerabile di intervalli aperti). Provare quindi che $\{A \subset \mathbf{R} : f^{-1}(A) \in \Sigma\}$ é sigma algebra.

Esercizio 2 $\{x : \exists \lim_n f_n(x)\} = \{x : \underline{\lim}_n f_n(x) = \overline{\lim}_n f_n(x)\}$

Dimostrazione del Teorema di Lusin. Dato $j \in \mathbf{N}$, siano I_{ij} intervalli disgiunti di lunghezza $\frac{1}{j}$ tali che $\cup_i I_{ij} = \mathbf{R}$. É $A = \cup_i A_{ij}$, $A_{ij} := A \cap f^{-1}(I_{ij})$ $(A_{ij} \cap A_{lj} = \emptyset$ se $i \neq l!)$.
Siano $K_{ij}^{\epsilon} \subset A_{ij}$ compatti tali che $L^N(A_{ij} \setminus K_{ij}^{\epsilon}) \le \frac{\epsilon}{2^{i+j+2}}$ $(K_{ij}^{\epsilon} \cap K_{lj}^{\epsilon} = \emptyset$ se $i \neq l!)$.
Siano $g_j \equiv \alpha_{ij} \in I_{ij}$ in K_{ij}^{ϵ}. Le g_j sono continue su $\cup_{i=1}^{n} K_{ij}^{\epsilon}$ $\forall n$. Poi

$$L^N(A \setminus \cup_{i=1}^{n} K_{ij}^{\epsilon}) \to L^N(A \setminus \cup_{i=1}^{\infty} K_{ij}^{\epsilon}) \le \frac{\epsilon}{2^{j+1}} \Rightarrow \exists\ n_j :\ L^N(A \setminus \cup_{i=1}^{n_j} K_{ij}^{\epsilon}) \le \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Posto allora $K^{\epsilon} := \cap_j \cup_{i=1}^{n_j} K_{ij}^{\epsilon}$, é $|g_j(x) - f(x)| < \frac{1}{j}$ $\forall x \in K^{\epsilon}$ e quindi f é continua su K^{ϵ}. Infine $L^N(A \setminus K) \le \sum_j L^N(A \setminus \cup_{i=1}^{n_j} K_{ij}^{\epsilon}) \le 2\epsilon$.

Esercizio 3 $\{x + f(x) :\ x \in J_{nj}\} = J_{nj} + c_{nj}$ se $f \equiv c_{nj}$ su J_{nj}. Dunque

$$L^1(g(O)) = \frac{1}{2} \sum_n \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n = \frac{1}{2} \quad \text{e quindi} \quad L^1(g(C)) = \frac{1}{2}$$

Esercizio 4 $|f(x) - f(y)| \le L\,|x - y| \ \Rightarrow\ l(f(I)) \le Ll(I)$ $\forall I$ intervallo .
Poi, se f é la funzione di Cantor, $L^1(f(C)) = 1$.

Esercizi 5-6-7 Sia g come nell' esercizio 3. Sia $A \subset g(C)$ non misurabile (tale A esiste perché $g(C)$ ha misura positiva!), e sia $E = g^{-1}(A)$. Si ha:

5 $E \subset C$ ha misura nulla ed é quindi misurabile, mentre $g(E) = A$ non é misurabile.

6-(i) Se $h := g^{-1}, h^{-1}(E) = g(E) = A$ non é misurabile.

6-(ii) Sia E come in 6-(i). Se E fosse boreliano, $A = g(E) = h^{-1}(E) =$ sarebbe misurabile.

6-(iii) Sia $L^1(E) = 0$ con E non boreliano. Sappiamo che esiste un boreliano di misura nulla che contiene E. Siccome E non é boreliano, $L^1_{\mathcal{B}}$ non é completa.

7 Il controesempio é : $\chi_E \circ h = \chi_{h^{-1}(E)} = \chi_A$ (h come in 8-9). L'affermazione é ovvia: $\{g > c\}$ boreliano $\Rightarrow f^{-1}(\{g > c\})$ misurabile.

Esercizio 9 $L^n(\{x \in B : \frac{1}{\|x\|^p} > t\}) = vol(B)t^{-\frac{n}{p}}$ se $t \geq 1$ e vale $vol(B)$ se $t \leq 1 :$ $\quad p < n \Rightarrow I_p = vol(B)[1 + \int_1^\infty \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}}}] = vol(B)\frac{n}{n-p}, \quad p \geq n \Rightarrow I_p = +\infty.$

Calcoli analoghi per J_p.

Esercizio 11 Per Beppo Levi e numerabile additivitá dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} |f(x+k)|\chi_{[0,1]}\right] dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 |f(x+k)|dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} |f(t)|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f| < +\infty$$

Dunque $\sum_{-\infty}^{+\infty} |f(x+k)| < +\infty$ per quasi ogni $x \in [0,1]$. Siccome $\sum_{-\infty}^{+\infty} |f(x+n+k)| = \sum_{-\infty}^{+\infty} |f(x+k)| \quad \forall n \in \mathbf{Z}$ é infatti $\sum_{-\infty}^{+\infty} |f(x+k)| < +\infty$ per quasi ogni $x \in \mathbf{R}$ e tale funzione é per l'appunto 1-periodica.

Infine $\int_0^1 |\sum_{-\infty}^{+\infty} f(x+k)|dx \leq \int_{\mathbf{R}} |f| < +\infty$ e quindi, per periodicitá, g é sommabile su ogni intervallo limitato.

Esercizio 12 Effettuando un cambio di variabile ed utilizzando la periodicitá del coseno, troviamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos nx)^{n^4} dx = \frac{1}{n} \int_0^{n\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n^4} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n^4} dt$$

Siccome $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$, vediamo che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n^4} dt = O(\frac{1}{n^2})$ e quindi, per Beppo Levi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (\cos nx)^{n^4}\right] dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos nx)^{n^4} dx < +\infty$$

Dunque $\sum_{-\infty}^{+\infty} (\cos nx)^{n^4} < +\infty$ quasi per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ed infatti, per periodicitá, quasi per ogni x.

Infine la serie diverge in ogni $x = \frac{2k\pi}{l}, \ k, l \in \mathbf{N}$.

Esercizio 13. $\int_{-M}^{M} \frac{dx}{\sqrt{|x-r_n|}}) \leq 8 \int_0^M \frac{dt}{\sqrt{t}} = 16\sqrt{M} \quad \Rightarrow$

$$\sum_n \int_{-M}^{M} \frac{1}{2^n\sqrt{|x-r_n|}} \leq 16\sqrt{M} \quad \Rightarrow \quad \int_{-M}^{M}[\sum_n \int_{-M}^{M} \frac{1}{2^n\sqrt{|x-r_n|}}]dx < \infty$$

$$\Rightarrow \quad \sum_n \frac{1}{2^n\sqrt{|x-r_n|}} < +\infty \quad \text{q.o.}x$$

Esercizio 14 Sia $g(t) = L^N(\{|f| > t\})$, cosicché g é monotona decrescente e

$$(i) \int |f| = \int_0^\infty g(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} g + \int_1^\infty g, \quad g(\frac{1}{2^{n-1}})\frac{1}{2^n} \leq \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} g \leq g(\frac{1}{2^n})\frac{1}{2^n}$$

Dunque $\int |f| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} g \geq \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} g(\frac{1}{2^n})\frac{1}{2^n}$ mentre $\int_1^\infty g \leq g(1)\|f\|_\infty \quad \Rightarrow$

$\int |f| \leq g(1)\|f\|_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} g(\frac{1}{2^n})\frac{1}{2^n} \leq max\{1, \|f\|_\infty\} \sum_{n=0}^{\infty} g(\frac{1}{2^n})\frac{1}{2^n}$.

Controesempio: $f(x) = \frac{1}{x}\chi_{(0,1)}(x) \;\; x \in \mathbf{R}$.
É $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} L^1(\{f > \frac{1}{2^n}\}) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} < +\infty$ ma l'integrale diverge.

(ii) $\int |f| = \int_0^\infty g \geq \sum_{n\geq 1} g(n)$ e quindi l'ipotesi di limitatezza non entra. Il viceversa é in generale falso: se $|f(x)| \leq 1 \;\; \forall x$ la serie converge (serie di zeri!) ma, in generale, $\int |f| = +\infty$.

Esercizio 15 Come sopra,

$$\int |f| = \int_0^1 g + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2^n}^{2^{n+1}} g \geq g(1) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} 2^n g(2^n) \geq \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n g(2^n)$$

indipendentemente dal fatto che f sia a supporto comptto. Viceversa, se $f \equiv 0$ fuori della palla B_r, allora $L^N(\{|f| > 0\}) \leq vol(B_r)$ e quindi $g \leq vol(B_r)$ e quindi $\int |f| = \int_0^1 g + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2^n}^{2^{n+1}} g \leq vol(B_r) + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n g(2^n)$.

Controesempio. $f(x) = \frac{1}{x}\chi_{[2,+\infty)}(x)$: la serie é una serie di zeri, ma l'integrale diverge.

Esercizio 16

$$(i-ii) \int_{\{|f|\geq t\}} |f|^p \geq t^p \mu(\{|f| \geq t\}) \Rightarrow \mu(\{|f| \geq t\}) \leq \frac{1}{t^p}\int_{\{|f|\geq t\}} |f|^p = \frac{1}{t^p} \circ (1)$$

perché $\int_{\{|f|\geq t\}} |f|^p \to_{t\to+\infty} \int_{\{|f|=+\infty\}} |f| = 0$ se $\int |f|^p < +\infty$.