AM5: - X Settimana

IL LEMMA DI RICOPRIMENTO DI VITALI

ed

IL TEOREMA DI DIFFERENZIAZIONE DI LEBESGUE-BESICOVITCH

Ricoprimento di Vitali. Sia $A \subset \mathbf{R}^N$. Sia $\mathcal{V}$ famiglia di **palle chiuse**. $\mathcal{V}$ si dice ricoprimento fino (o di Vitali di) A se

$$\forall x \in A, \quad \exists B_r(x) \in \mathcal{V} \qquad \text{e} \qquad \inf\{r > 0 : B_r(x) \in \mathcal{V}\} = 0$$

ESEMPIO. Sia A aperto. Fissato $r > 0$, l'insieme delle palle chiuse contenute in A e di raggio minore di r é ricoprimento di Vitali di A.

Lemma di Vitali. Sia $A \subset \mathbf{R}^N$, Ω aperto di misura finita. Sia $\mathcal{V}$ ricoprimento di Vitali di A. Allora $\exists B_j \in \mathcal{V}$ $j \in \mathbf{N}$ tali che

$$B_j \subset \Omega \ \ \forall j, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j \quad \text{e} \qquad L^N(A \setminus \cup_j B_j) = 0$$

ESEMPIO. Sia Ω aperto, $\delta > 0$. Allora esiste una famiglia numerabile di palle chiuse $B_j \subset \Omega$ disgiunte di raggio minore di δ e tali che $L^N(\Omega \setminus \cup_j B_j) = 0$

Prova. Nel seguito indicheremo con $B_r(x)$ una palla in $\mathcal{V}$ di raggio r e centro x e con $r = r(B)$ il raggio di un generico elemento B di $\mathcal{V}$. Indichiamo $\Omega_1 := \Omega$. Posto

$$\delta_1 := \sup\{r(B) : B \subset \Omega_1, \}, \qquad \text{sia} \qquad B_1 \subset \Omega_1 \ : \quad r_1 := r(B_1) \geq \frac{\delta_1}{2}$$

Posiamo supporre (se no la dimostrazione é finita) che $\exists x \in A \setminus B_1$ e quindi $\exists\, B(x) \in \mathcal{V}$: $B \subset \Omega_2 := \Omega_1 \setminus B_1$. Posto

$$\delta_2 := \sup\{r(B) : B \subset \Omega_2\} \leq \delta_1 \qquad \text{sia} \qquad B_2 \subset \Omega_2 \ : \quad r_2 := r(B_2) \geq \frac{\delta_2}{2}$$

Ovviamente $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Possiamo supporre, come sopra, che $\exists\, B \in \mathcal{V}$: $B \subset \Omega_3 := \Omega_2 \setminus B_2$, e, iterando, si trova (salvo terminare la dimostrazione in un numero finito di passi) che

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \exists\ B_n \in \mathcal{V}:\qquad B_{n+1} \subset \Omega_{n+1} := \Omega_n \setminus B_n = \Omega_1 \setminus \left(\cup_{j=1}^n B_j\right) \qquad \text{con}$$

$$r_{n+1} := r(B_{n+1}) \geq \frac{\delta_{n+1}}{2}, \qquad\qquad \delta_{n+1} := \sup\{r(B) : B \subset \Omega_{n+1}\} \leq \delta_n$$

Notiamo che, siccome le palle B_n sono disgiunte, allora

$$c_N \sum_n r_n^N \ = \ L^N(\cup_n B_n) \ \leq \ L^N(\Omega_1) \ < \ +\infty \quad \Rightarrow \quad r_n \to_n 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_n \to_n 0.$$

Ció comporta che ogni palla B deve intersecare qualche B_k, perché

$$B \cap [\cup_{k=1}^n B_k] = \emptyset \quad \Rightarrow \quad B \subset \Omega_{n+1} \Rightarrow \quad r(B) \leq \delta_{n+1}$$

A sua volta ció comporta che, indicata con $\tilde{B}_n$ la palla concentrica a B_n e di raggio $r(\tilde{B}_n) = 5r_n$, allora

$$(*) \qquad x \in A,\ \ x \notin \cup_{j=1}^{n-1} B_j \quad \Rightarrow \quad \exists k \geq n: \qquad x \in \tilde{B}_k$$

Infatti, $x \in A,\ x \notin \cup_{j=1}^{n-1} B_j \ \Rightarrow \ \exists B(x) \in \mathcal{V}$, $B(x) \subset \Omega_n = \Omega \setminus \cup_{j=1}^{n-1} B_j$ con $B(x)$ palla centrata in x di raggio, diciamo, $r(x)$. D'accordo con quanto sopra osservato, esiste un primo indice $k \geq n$ tale che $B(x) \cap B_k \neq \emptyset$.

Dunque $\qquad B(x) \subset \Omega_k = \Omega \setminus \cup_{j=1}^{k-1} B_j \qquad$ e quindi $\qquad r(x) \leq \delta_k \leq 2r_k$

Siccome $B(x) \cap B_k \neq \emptyset$, concludiamo che $B(x)$ é contenuta nella palla che ha lo stesso centro di B_k e raggio $5r_k$, cioé appunto $\tilde{B}_k$. Da $(*)$ segue che

$$A \setminus (\cup_n B_n) \quad \subset \quad \cup_{k \geq n} \tilde{B}_k \quad \forall n. \qquad \text{Ma} \qquad L^N\left(\cup_{k\geq n} \tilde{B}_k\right) \leq c_N\, 5^N \sum_{k=n}^{\infty} r_n^N \to_n 0$$

e quindi

$$L^N\left(A \setminus\ (\cup_n B_n)\right) \quad \leq \quad c_N 5^N \sum_{k=n}^{\infty} r_n^N \to_n 0$$

NOTA. Nel Lemma di Vitali la conclusione continua a valere, ovviamente, anche se si sostituisce L^N con una misura di Radon μ assolutamente continua rispetto a L^N. Si puó in effetti dimostrare che vale, molto piú in generale, per qualsiasi misura di Borel regolare.

Lemma 1. Sia $0 \leq f \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Posto

$$f^\sharp(x) \ = \ \limsup_{r\to 0} \frac{1}{vol B_r(x)} \int_{B_r(x)} f(y)\, dy$$

si ha

$$\int_{\{f^\sharp \geq c\}} f(y)\, dy \ \geq \ c\, L^N(\{f^\sharp \geq c\}) \qquad \forall c > 0$$

NOTA. (i) Se f é anche continua, dal teorema della media segue che $f^\sharp = f$ ed il lemma si riduce alla diseguaglianza di Chebicheff.

(ii) Sia $\varphi = \frac{1}{volB_1}\chi_{B_1}$, $\varphi_r = \frac{1}{r^N}\varphi(\frac{x}{r}) = \frac{1}{r^N volB_1}\chi_{B_1}(\frac{x}{r}) = \frac{1}{r^N volB_1}\chi_{B_r}(x)$.

É $\frac{1}{volB_r(x)}\int\limits_{B_r(x)} f(y)\,dy = \frac{1}{r^N volB_1}\int\limits_{\mathbf{R}^N} f(y)\chi_{B_r(x)}(y)\,dy =$

$\frac{1}{r^N volB_1}\int\limits_{\mathbf{R}^N} f(y)\chi_{B_r}(x-y)\,dy = (f*\varphi_r)(x)$. Dunque

$$f^\sharp(x) = \limsup_{r\to 0} f*\varphi_r \qquad \text{é misurabile e}$$

$$\frac{1}{volB_r(x)}\int\limits_{B_r(x)} f(y)\,dy = f*\varphi_r \to_{r\to 0} f \qquad \text{in} \qquad L^1(\mathbf{R}^N)$$

Prova. Scriviamo $A_c := \{x : \; f^\sharp(x) \ge c\}$. Fissato $0 < \epsilon < c$,

$$x \in A_c \quad \Rightarrow \quad \exists r_j \to 0 : \quad \frac{1}{volB_{r_j}(x)}\int\limits_{B_{r_j}(x)} f(y)\,dy \ \ge\ c - \epsilon$$

Dunque, $\mathcal{V} := \{B_r(x) : \; x \in A_c, \; \frac{1}{volB_r(x)}\int\limits_{B_r(x)} f(y) \ \ge\ c-\epsilon\}$ é un ricoprimento fino di A_c. Fissato $R > 0$, Ω aperto limitato contenente $A_c^R := \{x \in A_c : \; |x| < R\}$, dal Lemma di Vitali otteniamo

$\exists B_j \in \mathcal{V}$, $B_j \subset \Omega$ palle chiuse disgiunte tali che $L^N\left(A_c^R \setminus \cup_j B_j\right) = 0$ e quindi

$$L^N(A_c^R) \le L^N\left((A_c^R \setminus \cup_j B_j) \ \cup_j B_j\right) \le \sum_j vol(B_j) \le \frac{1}{c-\epsilon}\sum_j \int\limits_{B_j} f \le \frac{1}{c-\epsilon}\int\limits_{\Omega} f$$

e quindi

$$(\star) \qquad L^N(A_c^R)\,(c-\epsilon) \ \le\ \inf\{\int\limits_{\Omega} f : \Omega \ \ \text{aperto}, \ \ A_c^R \subset \Omega\} \ =\ \int\limits_{A_c^R} f \qquad \forall \epsilon > 0$$

Infine, sia $R_j < R_{j+1} \to +\infty$ per cui $A_c := \{x : \; f^\sharp(x) \ge c\} = \cup_j A_c^{R_j}$, unione crescente. Da $(\star)$, ovvero

$L^N(A_c^R)c \le \int\limits_{A_c^R} f$, e $L^N(A_c^{R_j}) \to_j L^N(A_c)$ $\int\limits_{A_c^{R_j}} f \to_j \int\limits_{A_c} f$, segue la tesi.

Il Lemma 1 ha la seguente (ovvia ma importante) estensione:

Lemma 2. Sia ν misura di Radon, cioé ν é boreliana, finita sui compatti e

$\nu(A) = \inf\{\nu(\Omega) : A \subset \Omega,\ \ \Omega \text{ aperto}\}$

$\nu(E) = \sup\{\nu(K) : K \subset A,\ \ K \text{ compatto}\} \qquad \forall E \quad \text{boreliano}$

Allora, $\quad A \subset A_c = \{x : \limsup_{r\to 0} \frac{\nu(B_r(x))}{vol(B_r(x))} \geq c\} \Rightarrow \nu(A) \geq c\, L^N(A)$

Prova. Fissato $0 < \epsilon < c$,

$$x \in A_c \quad \Rightarrow \quad \exists r_j \to 0 : \quad \frac{\nu(B_{r_j}(x))}{vol(B_{r_j}(x))} \geq c - \epsilon$$

Dunque, $\mathcal{V} := \{B_r(x) : \quad x \in A, \quad \frac{\nu(B_r(x))}{vol(B_r(x))} \geq c - \epsilon\}$ é un ricoprimento di Vitali di A. Fissato $R > 0$, Ω aperto limitato contenente $A^R := A \cap B_R$, dal Lemma di Vitali otteniamo

$\exists B_j \in \mathcal{V}$ palle chiuse disgiunte e tali che $L^N\left(A^R \setminus \cup_j B_j\right) = 0$ e quindi

$$L^N(A^R) \leq L^N\left((A^R \setminus \cup_j B_j)\ \cup_j B_j\right) \leq \sum_j vol(B_j) \leq$$

$$\leq \frac{1}{c-\epsilon} \sum_j \nu(B_j) \leq \frac{1}{c-\epsilon}\, \nu(\Omega)$$

e quindi

$$L^N(A^R)\,(c-\epsilon) \leq \inf\{\nu(\Omega) : \Omega \quad \text{aperto}, \quad A^R \subset \Omega\} = \nu(A^R) \quad \forall \epsilon > 0, \quad \forall R > 0$$

Corollario 1. Sia ν misura di Radon singolare rispetto a L^N. Allora

$$\frac{\nu(B_r(x))}{L^N(B_r(x))} \to_{r\to 0} 0 \quad q.o.x$$

Infatti, sia $L^N(Z) = 0 = \nu(Z^c)$. Allora, per ogni $c > 0$, si ha

$$L^N(\{x : \limsup_{r\to 0} \frac{\nu(B_r(x))}{vol B_r(x)} \geq c\} = L^N(\{x \in Z^c : \limsup_{r\to 0} \frac{\nu(B_r(x))}{vol B_r(x)} \geq c\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c}\nu(\{x \in Z^c : \limsup_{r\to 0} \frac{\nu(B_r(x))}{vol B_r(x)} \geq c\}) = 0$$

NOTA. Come nel Lemma di Vitali, il Lemma 2 e il Corollario 1 continuano a valere se a L^N si sostituisce una qualsiasi misura di Radon.

IL TEOREMA DI DIFFERENZIAZIONE DI LEBESGUE-BESICOVITCH

Sia $\quad f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N). \quad$ Allora

$$\frac{1}{vol(B_r)} \int\limits_{B_r(x)} |f(x) - f(y)|\, dy \ \to_{r\to 0} 0 \qquad q.o.\ x$$

In particolare, $\quad \frac{1}{vol(B_r)} \int\limits_{B_r(x)} f(y)\, dy \ \to_{r\to 0} f(x) \qquad q.o.\ x$

NOTA. Se f é continua, la conclusione é vera per ogni x:

$$\forall r, \quad \exists \xi(r) \in B_r(x) : \quad \frac{1}{vol(B_r)} \int\limits_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| dy = |f(\xi(r)) - f(x)| \to_{r\to 0} f(x)$$

Prova. Possiamo supporre, sostituendo f con $f\,\chi_{B_R}$, che sia $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Posto

$$L(x) := \limsup_{r\to 0} \left[\frac{1}{vol B_r} \int\limits_{B_r(x)} |f(x) - f(y)|\, dy \right]$$ si tratta di provare che

$L^N(\{x : \quad L(x) \ \geq \ \alpha\}) \ = \ 0 \quad \forall \alpha > 0.$ Fissata $\quad \varphi \in C^\infty_0(\mathbf{R}^N)$

si ha $$L(x) \leq \limsup_{r\to 0} \left[\frac{1}{vol B_r} \int\limits_{B_r(x)} (|f(x) - \varphi(y)| + |\varphi(y) - f(y)|)\ dy \right] \leq$$

$\leq \ |f(x) - \varphi(x)| + (f - \varphi)^\sharp(x).$ Fissato $\quad \alpha > 0 \quad$ si ha quindi

$$\{x : \quad L(x) \ \geq \ \alpha\} \ \subset \ \{x : \quad |f(x) - \varphi(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\} \ \cup \ \{x : \quad (f - \varphi)^\sharp(x) \geq \ \frac{\alpha}{2}\}$$

e quindi, per il Lemma 1, $\quad L^N(\{x : \quad L(x) \ \geq \ \alpha\}) \ \leq$

$$\leq \ L^N(\{x : \quad |f(x) - \varphi(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}) + L^N(\{x : \quad (f - \varphi)^\sharp(x) \geq \ \frac{\alpha}{2}\}$$

$$\leq \frac{2}{\alpha} \int\limits_{|f-\varphi| \geq \frac{\alpha}{2}} |f - \varphi| \ + \int\limits_{\{(f-\varphi)^\sharp \ \geq \ \frac{\alpha}{2}\}} |f - \varphi| \ \ \leq \ \frac{4}{\alpha} \int\limits_{\mathbf{R}^N} |f - \varphi|$$ e quindi

$$L^N(\{x : \quad L(x) \ \geq \ \alpha\}) \ \ \leq \ \ \frac{4}{\alpha} \ \ \inf \left\{ \int\limits_{\mathbf{R}^N} |f - \varphi| \ : \quad \varphi \in C^\infty_0 \right\} \ = \ 0$$

Corollario 2. Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$. Allora

$$\frac{d}{dx} \int\limits_a^x f(t)\, dt \; = \; f(x) \;\; q.o. \; x$$

Prova. Applicando L-B, otteniamo quasi per ogni x,

$$|\frac{1}{r} \int\limits_x^{x+r} f(t)\, dt \; - \; f(x)| \; = \; |\frac{1}{r} \int\limits_x^{x+r} f(t)\, dt \; - \; \frac{1}{r} \int\limits_x^{x+r} f(x)\, dt| \leq$$

$$\leq \frac{2}{2|r|} \int_{x-|r|}^{x+|r|} |f(t) - f(x)|\, dt \rightarrow_{r \to 0}$$

NOTA. Il Corollario 1 vale anche con μ misura di Radon al posto di L^N.

Corollario 3. Sia μ misura boreliana finita in $\mathbf{R}^N$, $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$ decomposizione di Lebesgue di μ rispetto alla misura di lebesgue L^N. Allora

$$\frac{d\mu}{dx} \; := \; \frac{d\mu}{dL^N}(x) := \lim_{r \to 0} \frac{\mu(B_r(x))}{vol(B_r)}$$

esiste L^N-quasi ovunque, é L^N-sommabile e

$$\mu_{ac}(E) \; = \; \int_E \frac{d\mu}{dL^N}\, dL^N$$

Infatti, per Radon-Nikodym, esiste $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ tale che $\mu_{ac}(E) = \int_E f\, dL^N$ e, per Lebesgue-Besicovitch ed il Corollario 2,

$$\frac{\mu(B_r(x))}{vol(B_r)} \; = \; \frac{\int_{B_r(x)} f \; + \; \mu_s(B_r(x))}{vol(B_r)} \rightarrow_r f(x) \quad L^N - q.o. \; x$$

Funzione di distribuzione di una misura di Radon in R.

Se μ é misura di Radon in $\mathbf{R}$, tale che $\mu((-\infty, x)) < +\infty \; \forall x$, resta definita la **funzione di distribuzione di** μ :

$$F_\mu(x) \; := \; \mu((-\infty, x)) \; = \; \int\limits_{-\infty}^x \, d\mu$$

Se, ad esempio, $\mu_f(E) := \int\limits_E f dx$, $f \geq 0$ Lebesgue integrabile, allora F_μ non é altro che la funzione integrale di f, $F(x) := \int\limits_{-\infty}^x f(t)dt$.

Si ha che F_μ é derivabile L^1-quasi ovunque e $\frac{dF_\mu}{dx}(x) = \frac{d\mu}{dx}$ $q.o.x.$ Infatti, dal Corollario 3:

$$\mu(E) = \int_E \frac{d\mu}{dx}dx + \mu_s(E) \quad \forall E \text{ boreliano, e quindi} \quad F_\mu(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{d\mu}{dt}dt + \mu_s((-\infty, x))$$

Si tratta quindi di mostrare che la funzione di distribuzione di una misura singolare (rispetto alla misura di Lebesgue) ha derivata nulla q.o.. Ció segue dal Corollario 1:

$$\left| \frac{1}{t}[\mu_s((-\infty, x+t)) - \mu_s((-\infty, x))] \right| \leq 2 \ \frac{\mu_s\,(\,[\,x - |t|, x + |t|\,]\,)}{2|t|} \rightarrow_{t\to 0} 0$$

Possiamo quindi scrivere: $$F_\mu(x) = \int_{-\infty}^{x} F'_\mu(t)\,dt + \mu_s((-\infty, x))$$

Corollario: le funzioni monotone sono derivabili quasi ovunque.

Se F é non decrescente, inferiormente limitata e $\lim\limits_{x\to x_0^-} F(x) = F(x_0)$ per ogni x_0, allora esiste una misura di Borel μ_F tale che $F(x) := \mu_F((-\infty, x))$ $\forall x$ e quindi

F é derivabile q.o. e $$F(x) = F(-\infty) + \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt + (\mu_F)_s((-\infty, x))$$

Sostituendo F con $F(x) - F(-\infty)$, possiamo supporre che $F(-\infty) = 0$. Sia

$$\mu_F(A) := \inf \{ \sum_{j=1}^{\infty} [\,F(b_j) - F(a_j)\,] : \quad A \subset \cup_j\ [\,a_j,\ b_j\,)\,\}.$$

É facile vedere che μ_F é misura metrica e quindi Boreliana ed infatti di Radon (μ si chiama misura di Lebesgue-Stieltijes generata da F). Inoltre , chiaramente, $\mu([a, b)) = F(b) - F(a)$ e quindi $\mu((-\infty, x)) = F(x)$ $\forall x \in \mathbf{R}$ e ció, per quanto visto, prova quanto asserito: $\frac{dF}{dx}(x) = \frac{d\mu_F}{dx}$.

Notiamo infine che $\mu(\{b\}) = [\,\lim\limits_{t\to b^+} F(t)\,] - F(b)$ é, in b, il 'salto' di F.

NOTA. La formula di Torricelli-Newton per F monotona (con $F(-\infty) = 0$): $F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad (\mu_F)_s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_F$ é assolutamente continua.

Ad esempio, la funzione di Cantor f (che é continua e non decrescente), é derivabile q.o. con derivata nulla nel complementare dell'insieme di Cantor (ove é localmente costante), ma non é l'integrale della sua derivata: $f(x) \neq \int_0^x f' \equiv 0$!

In effetti, la validitá della formula di Torricelli-Newton per F comporta una speciale proprietá di F: F deve essere **assolutamente continua**...e viceversa.

Funzioni BV (a variazione limitata), AC (assolutamente continue) e la formula di Torricelli-Newton.

Sia $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Dati $I_j = (a_j, b_j),\ j = 1, \ldots, p,\ I_i \cap I_j = \emptyset\ \forall i \neq j$, scriveremo $\omega[F, \{a_j, b_j\}] := \sum_{j=1}^{p} |F(b_j) - F(a_j)|$.

F é AC in $[a, b]$ se $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \sum_{j=1}^{p} (b_j - a_j) \leq \delta \ \Rightarrow\ \omega[F, \{a_j, b_j\}] \leq \epsilon$

F é BV in $[a, b]$ se $V_a^b(F) := \sup \{\omega[F, \{a_j, b_j\}] \ :\ (a_j, b_j) \subset [a, b]\} < +\infty$

Esempi: 1) se $f \in L^1(\mathbf{R})$ allora $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ é AC.

2) $F(x) := \mu((-\infty, x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)\, dt \ +\ \mu_s((-\infty, x))$ é BV. É AC $\Leftrightarrow$ $\mu_s = 0$.

1) É l' assoluta continuitá dell'integrale. 2) F nondecrescente $\Rightarrow$ $V_a^b(F) = F(b) - F(a)$. Poi, $A \subset \cup_j\ (a_j, b_j)$, $\sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) \leq \delta \ \Rightarrow\ \mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu([a_j, b_j))$ $\leq \sum_{j=1}^{\infty}[\ \mu((-\infty, b_j) \ -\ \mu((-\infty, a_j)\ ] \ \leq\ \sum_{j=1}^{\infty}\ [\ F(b_j) - F(a_j)\ ] \ \leq\ \epsilon.$ Dunque $L^1(A) = 0 \ \Rightarrow\ \mu(A) = 0 \ \Rightarrow\ \mu_s \equiv 0.$

Lemma.

(i) $V_a^x(F)$ é non decrescente e $x < y \ \Rightarrow\ V_a^y(F) = V_a^x(F) + V_x^y(F)$

(ii) $G(x) := V_a^x(F) - F(x)$ é non decrescente

(iii) F é AC in $[a, b]$ $\Rightarrow$ F é BV in $[a, b]$ e $V_a^x(F)$ é AC.

La (i) si verifica facilmente. La (ii) segue da $x < y \ \Rightarrow\ |F(x) - F(y)| \leq V_x^y(F)$. (iii): F é AC $\Rightarrow$ $\exists \delta :\ V_x^{x+\delta}(F) \leq 1\ \forall x \in [a, b - \delta]$. Ció implica che F é BV.

Proposizione. Se F é BV in $[a, b]$, allora F é derivabile q.o. in $[a, b]$.

Inoltre, vale (T-N), cioé $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt$ se e solo se F é AC

Estendiamo F : $F(x) = F(a)\ \forall x \leq a,\ F(x) = F(b)\ \forall x \geq b$. Dal Lemma segue che $F = V_a^x(F) - [V_a^x(F) - F]$ é differenza di due funzioni monotone limitate e quindi é derivabile q.o. Se poi F é AC, allora $F = F_1 - F_2$ con F_i nondecrescenti e AC: (T-N) vale per le F_i e quindi vale anche per F.