AM5 2005/06 : I ESONERO

TEMA 1

Introdurre la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$ e mostrare che é boreliana.

Nel seguito, X é un insieme, $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ é σ-algebra, $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ é misura.

TEMA 2.

Illustrare con controesempi e Teoremi il problema:

$$f_n \in L^1(X, \Sigma, \mu) \quad f_n \to f \quad \mu - q.o. \quad \Rightarrow \quad \int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu \quad ?$$

TEMA 3.

Sia $p \in (1, +\infty)$. Provare che $\sup_n \int |f_n|^p < +\infty \quad \Rightarrow$

$$\exists f \in L^p(X, \Sigma, \mu), \quad \exists n_k \to_k +\infty : \quad f_{n_k} \rightharpoonup_k f \quad \text{in} \quad L^p$$

TEMA 4.

Sia l funzionale lineare e continuo su $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ tale che

$f \in L^\infty, \quad f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad l(f) \geq 0$ Provare che :

$$\exists g \in L^1, \quad g \geq 0 \quad \mu q.o. : \quad \text{tale che} \quad l(f) = \int_X f \; g \, d\mu \quad \forall f \in L^\infty \quad \Leftrightarrow$$

$$f_n \rightharpoonup^\star 0 \quad \Rightarrow \quad l(f_n) \to 0$$

Esercizio 1.

Sia $\mu(X) < +\infty$, $\quad 1 \le p < +\infty$. Provare che

(i) $\quad p \le r \quad \Rightarrow \quad L^r \subset L^p$, $\qquad$ (ii) $\quad L^r$ é denso in L^p

Dedurre che

(k) $\quad f_n \in L^p, \quad f_n \rightharpoonup 0 \quad \text{in} \quad L^p \quad \Rightarrow \quad f_n \rightharpoonup 0 \quad \text{in} \quad L^s \quad \forall s \le p$

(kk) $\quad \sup_n \|f_n\|_\infty < +\infty, \; \int_X f_n\, g \to 0 \quad \forall g \in L^p \quad \Rightarrow \quad \int_X f_n\, g \to 0 \quad \forall g \in L^1$

Esercizio 2.

Sia $f_n(x) = \sin(nx)$, $\quad x \in [0, \pi]$. $\quad$ Stabilire

(i) $\quad$ per quali $p \ge 1$ risulta $\quad f_n \rightharpoonup_n 0 \quad \text{in} \quad L^p([0, \pi])$

(ii) $\quad$ se $\quad f_n \quad$ converge (o ha estratte convergenti) in misura.

(iii) $\quad$ se $\quad f_n \quad$ converge (o ha estratte convergenti) quasi ovunque.

Esercizio 3.

(i) $\quad$ Sia $\quad f_n \in L^p, \quad p > 1 \quad$ tale che $\quad \sup_n \|f_n\|_p < +\infty$.

Provare che $\qquad f_n \to f$ quasi ovunque $\quad \Rightarrow \quad f_n \rightharpoonup_n f \quad \text{in} \quad L^p$.

(ii) $\quad$ Sia $\quad f_n(x) = x\, e^{-x^2}, \quad f_n(x) := n f(nx), \quad x \in \mathbf{R}$.

Stabilire per quali $\quad p \ge 1 \quad$ risulta

a) $\quad \sup_n \int_{\mathbf{R}} |f_n(x)|^p\, dx < +\infty$, $\qquad$ b) $\quad f_n \rightharpoonup_n 0 \quad \text{in} \quad L^p(\mathbf{R})$.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

(i) Segue da Holder con esponenti $\frac{r}{p}, \frac{r}{r-p}$:

$$\int_X |f|^p \leq (\int_X |f|^{p\frac{r}{p}} d\mu)^{\frac{p}{r}} \ (\int_X \ d\mu)^{1-\frac{p}{r}}$$

(ii) Sia $f \geq 0$ misurabile. Dal Lemma di rappresentazione per f e B. Levi:

$$\exists E_j \in \Sigma : \quad f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \ \chi_{E_j}(x) \qquad \forall x \in X, \qquad \int_X f = \sum_j \frac{1}{j} \ \mu(E_j)$$

Se $f \in L^1$, , allora $\mu(E_j) < +\infty \quad \forall j$ e quindi

$$\varphi_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \ \chi_{E_j} \in L^r \qquad \forall r \geq 1$$

e, per convergenza dominata, $0 \leq \int_X (f - \varphi_n)^p \to_n 0$. Data infine $f \in L^p$, basta scrivere $f = f^+ - f^-$.

(k) $1 \leq s < p < +\infty, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \qquad \frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1 \qquad \Rightarrow$

$q < r \leq +\infty$ e $L^p \subset L^s, \quad L^r \subset L^q$ Quindi

$$f_n \in L^p, \ \int_X f_n \, g \to 0 \quad \forall g \in L^q \quad \Rightarrow \quad f_n \in L^s \text{ e } \int_X f_n \, g \to 0 \quad \forall g \in L^r$$

(kk) Data $g \in L^1$ ed $\epsilon > 0$, sia $g_\epsilon \in L^p$ tale che $\|g - g_\epsilon\|_1 \leq \epsilon$. Allora

$$\limsup_n |\int_X f_n \, g| \leq |\int_X f_n \, g_\epsilon| \ + \ \int_X |f_n| \ |g - g_\epsilon| \leq |\int_X f_n \, g_\epsilon| \ + \ \|f_n\|_\infty \ \|g - g_\epsilon\|_1$$

$$\Rightarrow \quad \limsup_n |\int_X f_n \, g| \leq \epsilon \ \sup_n \ \|f_n\|_\infty$$

Esercizio 2. Intanto, $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \ \sin(nx)$ é sistema ortonormale in $L^2([0,\pi])$:

$$\int_0^\pi \sin^2(nx) \, dx = \frac{\pi}{2}, \qquad n \neq m \quad \Rightarrow \quad \int_0^\pi \sin(nx) \ \sin(mx) \, dx =$$

$$= \int_0^\pi \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \quad \frac{e^{imx} - e^{-imx}}{2i} \, dx = \int_0^\pi \frac{\cos(n-m)x \ - \cos(n+m)x}{2} \, dx = 0$$

(i) Dalla diseguaglianza di Bessel

$\sum_j |\int_0^\pi \sin(nx)\ f(x)\ dx|^2 \quad \le \quad \int_0^\pi |f(x)|^2\ dx \quad \forall f \in L^2([0,\pi])$ segue che

$\int_0^\pi \sin(nx)\ f(x)\ dx \to_n 0 \quad \forall f \in L^2([0,\pi])$ e cioé $f_n \rightharpoonup_n 0$ in $L^2([0,\pi])$

e quindi (vedi Esercizio 1)

$$\int_0^\pi \sin(nx)\ f(x)\ dx \to_n 0 \quad \forall f \in L^1([0,\pi])$$

.

(ii) Intanto, se $f_n \to f$ in misura, necessariamente $f = 0$ quasi ovunque, perché f_n converge debolmente a zero in L^p se $p > 1$ (vedi l'esercizio 3). Poi,

se $E_\epsilon := \{t \in [0,\pi] : |\sin t| \ge \epsilon\}$, $x = \dfrac{j\pi + t}{n}$, $t \in E_\epsilon \Rightarrow |\sin(nx)| = |\sin t| \ge \epsilon$ e quindi $\cup_{j=0}^n \frac{1}{n}(E_\epsilon + j\pi) \subset \{x \in [0,\pi] : |\sin(nx)| \ge \epsilon\}$ e quindi $\{x \in [0,\pi] : |\sin(nx)| \ge \epsilon\}$ ha misura (almeno) pari a quella di E_ϵ qualunque sia n, e quindi f_n (e neppure alcuna sottosuccessione) converge in misura.

(iii) Non c'é convergenza quasi ovunque, perché ció comporterebbe convergenza in misura.

Esercizio 3. (i) Intanto,

$\liminf \int_X |f_n|^p \ge \int_X |f|^p$, e quindi $\sup_n \|f_n - f\|_p < +\infty$. Quindi,

$$E \in \Sigma, \quad g \in L^q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad \Rightarrow \quad |\int (f_n - f)g| \le \|f_n - f\|_p \ (\int_E |g|^q) \le \epsilon$$

se $\mu(E) \le \delta_\epsilon$ e quindi $\int (f_n - f)g \to_n 0$ per il Teorema di Vitali.

(ii) Chiaramente $f_n(x) \to_n 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$. Poi,

$$\int_{\mathbf{R}} |f_n|^p dx = \int_{\mathbf{R}} n^{2p}\ |x|^p\ e^{-pn^2x^2}\ dx = n^{p-1} \int_{\mathbf{R}} |t|^p\ e^{-t^2}\ dt$$

e quindi $\|f_n\|_p \to +\infty$ se $p > 1$ e $\|f_n\|_1 = \int_{\mathbf{R}} |t|\ e^{-t^2}\ dt$ se $p = 1$. Infine, se $p = 1$ e $g(x) = \frac{x}{|x|}$, $\int_{\mathbf{R}} f_n(x)\ g(x)\ dx = \int_{\mathbf{R}} n^2 |x|\ e^{-n^2x^2}\ dx = \int_{\mathbf{R}} |t|\ e^{-t^2}\ dt$ e quindi f_n non tende debolmente a zero in L^1.

Dunque f_n non ha limite debole per alcun $p \ge 1$.