AM3-SOLUZIONI 1
A.A. 2005-2006

Laura Di Gregorio

2 marzo 2006

Soluzione 1 .
Si ha $f(0,0) = 0$ e poiché $f(x,0) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $f(0,y) = 0$ $\forall y \in \mathbb{R}$ si deduce che

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0\,.$$

Occorre dimostrare che

$$\begin{aligned} &\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h|\log(1+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\,. \end{aligned}$$

Passando a coordinate polari, $h = \rho\cos\theta$, $k = \rho\sin\theta$ si ottiene

$$\frac{|\rho\cos\theta\log(1+\rho\sin\theta)}{\rho} \leq \rho|\cos\theta\sin\theta| \longrightarrow 0\,, \qquad \rho \to 0\,.$$

Possiamo concludere che f è differenziabile in $(0,0)$.

Soluzione 2 .

(a) essendo funzione composta da funzioni continue f è continua in ogni punto di $\mathbb{R}^2$;

(b) si ha
$$f_x(x,y) = 2x|y|\cos(x^2+y^2)$$
esiste ed è continua in ogni punto di $\mathbb{R}^2$;
$$f_y(x,y) = \mathrm{sign}y\sin(x^2+y^2) + 2y|y|\cos(x^2+y^2)\,, \qquad y \neq 0\,,$$

esiste in ogni punto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = 0\}$.

Nei punti sull'asse $y = 0$ si considera il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0, y) - f(x, 0)}{y} = \text{sign} y \sin(x_0^2 + y^2)\,.$$

Se $x_0 = \pm\sqrt{n\pi}$, con $n \in \mathbb{N}$, allora $\sin(x_0^2 + y^2) = \sin(n\pi + y^2) = (-1)^n \sin y^2$ e quindi

$$f_y(x_0, 0) = \lim_{y \to 0} \text{sign} y \sin(x_0^2 + y^2) = 0\,.$$

Se $x_0 \neq \pm\sqrt{n\pi}$ allora

$$\lim_{y \to 0^+} \text{sign} y \sin(x_0^2 + y^2) = \sin x_0^2 \neq -\sin x_0^2 = \lim_{y \to 0^-} \text{sign} y \sin(x_0^2 + y^2)\,.$$

Concludiamo che f_y non può esistere nei punti $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq \pm\sqrt{n\pi}$.

(c) f è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = 0\}$ in quanto è una funzione composta da funzioni differenziabili; è differenziabile anche nei punti $(\pm\sqrt{n\pi}, 0)$, $n \in \mathbb{N}$, in quanto in tali punti ammette derivate parziali continue.

Come abbiamo già visto al punto (b), si ha che

$$\lim_{(x,y) \to (\pm\sqrt{n\pi}, 0)} f_y(x, 0) = 0 = f_y(\pm\sqrt{n\pi}, 0)$$

e f_x è continua in $\mathbb{R}^2$.

Soluzione 3 .