AM3 -Esercizi proposti
A.A. 2005-2006

Laura Di Gregorio

31 marzo 2006

Esercizio 1 .
Sia $F(x,y) = x^2y + e^{x+y} = 0$. Dimostrare che essa definisce implicitamente una funzione $y = g(x)$ definita per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Inoltre:

a. verificare che $g(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

b. verificare che $g(x) \longrightarrow 0^-$ per $x \longrightarrow -\infty$;

c. verificare che $g(x) \longrightarrow -\infty$ per $x \longrightarrow 0$;

d. verificare che $g(x)$ ha un punto di massimo locale in $x = 2$.

Esercizio 2 .
Si determinino gli eventuali punti critici della funzione

$$f(x,y,z) = x^2(y-1)^3(z+2)^2 \,.$$

Esercizio 3 .
Si determinino gli eventuali punti critici della funzione

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz \,.$$

Esercizio 4 .
Si verifichi che l'equazione

$$x^2 + xu^2 + y^2 + e^{xu} - z + y^2e^z = 0$$

determina un'unica funzione $z = z(x, y, u)$ tale che $z(0, 0, 0) = 1$ e che per tale funzione $(0, 0, 0)$ è punto critico. Si determini la natura di tale punto.

Esercizio 5 .
Sia $g(x)$ una funzione di classe C^2 in $\mathbb{R}$ tale che $g(0) = 0$, $g'(0) = g''(0) = 2$.

(a) Si verifichi che l'equazione

$$F(x, y) = y^3 + y + \lambda g(x) = 0\,, \qquad \lambda \neq 0 \tag{1}$$

definisce implicitamente $y = f(x)$ in un intorno di $(0, 0)$.

(b) Si verifichi che la funzione definita implicitamente da (1) ha come dominio tutto $\mathbb{R}$ e gli stessi estremanti di $g(x)$.

Esercizio 6 .
Sia $f(x, y, z) = \log(1 + x^2 + y^2) + \sin(x + y^2 + z) - x + z^2$.
Verificare che vale il teorema delle funzioni implicite in $(0, 0, 0)$.

Esercizio 7 .
Sia $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x, y, z, v) = \begin{cases} (y + 3)z - \tan(z + v) + 2x \\ \\ \sin(z + v) + 3y - x(v + 3) \end{cases}$$

Si dimostri che $F = 0$ definisce implicitamente $z = z(x, y)$ e $v = v(x, y)$ in un intorno di $(0, 0, 0, 0)$.