II Esonero di AM3 - 8/6/2006

1) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y\dot{y} = e^{x-y}\sin x \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

dando una stima esplicita sull'intervallo di esistenza della soluzione massimale.

2) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}} \\ y(0) = 2\ln 2\,,\ \ \dot{y}(0) = 3\ln 2. \end{cases}$$

3) Calcolare l'integrale superficiale:

$$\int_{\Sigma} z\, d\sigma,$$

dove Σ è il grafico della funzione $z = xy$ sull'insieme $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$.

4) Calcolare l'integrale:

$$\int_D y^3 e^x\, dx\, dy,$$

dove D è l'insieme del semipiano $y > 0$ delimitato dalle circonferenze di centro l'origine e raggio 1 e 2, e dalle rette $x = 0$ e $x = 1$.

5) Sia $\omega = 2xy^2zdx + 2x^2yzdy + (x^2y^2 - 2z)dz$ una 1-forma differenziale. Discutere se:
a) ω è chiusa;
b) ω è esatta, determinando eventualmente una primitiva $f(x,y,z)$ di ω.
Calcolare infine l'integrale di ω sul segmento che congiunge l'origine $(0,0,0)$ con il punto $(1,1,2)$.

6) Sia $f(x,y) = (1 + xy, x)$ un campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$ e $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 < 1, y > 0\}$. Calcolare direttamente il valore:

$$\int_{\partial A} f \cdot n ds,$$

ove $n(x,y)$ è la normale esterna ad A nel punto $(x,y) \in \partial A$. Verificare poi la validitá del conto precedente tramite il Teorema della divergenza.