I Esonero di AM3 - 8/4/2006

1) Siano $h(s,t) = \Big((s^2+t^2)^{\frac{3}{2}}, \sin s + \cos t\Big)$ e

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}x^2 y + z^2 y^2 & \text{se } y \geq 0 \\ \frac{e^{xy}-1}{y} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

(a) Provare continuitá ed eventualmente differenziabilitá di $f(x,y,z)$ in $\mathbb{R}^3$.
(b) Trovare l'insieme dei punti p per cui la funzione $f(x,y,z)$ risulta essere $C^1(\{p\})$.
(c) Calcolare lo Jacobiano di $g(x,y,z)$ in $(0,0,0)$, ove $g(x,y,z) =: h\big(f(x,y,z), y^2\big)$.

2) Sia $f(x,y,z) = |x-1| + \sqrt{2y^2+3z^2}$. Trovare i punti ed i valori di minimo/massimo assoluto di $f(x,y,z)$ sull'insieme $A = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$.

3) Sia

$$F(x,y,z) = \Big(\cos x \ln(1+z) + 1 + \tan(y^2) - e^y \cos x\ ,\ \cos x \sin y + (1+x)^2 z^2\Big).$$

(a) Rappresentare come grafico di un'opportuna funzione g l'insieme $\{F=0\}$ localmente in $p_0 = (0,0,0)$, fornendo un esempio esplicito di intorno di p_0 per cui tale rappresentazione valga.
(b) Trovare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione g rispetto a zero.
(c) Trovare lo sviluppo di Taylor al quarto ordine della funzione g rispetto a zero (facoltativo).

4) Sia $x_n \in l^2$, $n \geq 1$, definita nel seguente modo: $x_n^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{(n+1)^{\frac{k+1}{2}}}$.
(a) Calcolare $\|x_n\|_{l^2}^2$.
(b) Discutere la convergenza eventuale in l^1 e/o in l^2 della successione x_n per $n \to +\infty$.