

## Appello B di AM3 - 7/7/2006

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

1) Sia

$$f(x, y, z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2-y^2-z^2}} & \text{se } x^2 + y^2 + z^2 < 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 + z^2 \geq 1. \end{cases}$$

Allora:

- discutere la continuità di  $f(x, y, z)$ ;
- calcolare le derivate parziali di  $f(x, y, z)$  in punti di  $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ;
- discutere  $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ .

2) Sia  $F(x, y, z) = \sin(x + y) + \sin(x + z) + e^y z$ . Allora:

- rappresentare come grafico di un'opportuna funzione  $g$  l'insieme  $\{F = 0\}$  localmente in  $p_0 = (0, 0, 0)$ , fornendo un esempio esplicito di intorno di  $p_0$  per cui tale rappresentazione valga.
- trovare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione  $g$  rispetto a zero.

3) Sia

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + xy + 2y^2 + z^2}$$

e sia  $D = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$ . Calcolare il valore di massimo e minimo assoluti di  $f(x, y, z)$  in  $D$  (non è richiesto di determinare esattamente i punti ove sono assunti).

4) Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 2y' = (x - 1)(e^x - 1) \\ y(0) = 1, y'(0) = \frac{3}{4}, y''(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

5) Siano  $\omega_1 = 2xyz^2 dx + x^2 z^2 dy + 2x^2 yz dz$  e  $\omega_2 = \omega_1 + z^3 y dx$  due 1-forme definite  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $S = \{(x, y, z) : x^2 + 2y^2 + 9z^2 = 1, z > 0\}$  una porzione di ellissoide. Allora:

- determinare se  $\omega_1, \omega_2$  sono forme esatte in  $\mathbb{R}^3$ , calcolandone eventualmente un potenziale associato;
- calcolare  $\int_{\partial^+ S} \omega_2$ ;
- verificare direttamente il Teorema di Stokes per il campo vettoriale  $F(x, y, z) = (2xyz^2 + z^3 y, x^2 z^2, 2x^2 yz)$  sulla superficie  $S$ .

6) Calcolare  $\int_{\Sigma} \frac{x}{\sqrt{1+\sin^2 y}} d\sigma$ , ove  $\Sigma = \{(u \cos v, v, \cos v) : 0 \leq v \leq u, 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}\}$ .

N.B. Coloro che intendono recuperare il primo/secondo esonero dovranno svolgere i primi/secondi tre esercizi nel tempo massimo di un'ora e mezza. Tutti gli altri avranno invece a disposizione tre ore per svolgere tutto il compito.