# Appello A di AM3 - 19/6/2006 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

**Esercizio** 1
a) Si ha che:

$$|f(x,y,z)| \leq e^y |\sin x| + |x|(z+1)^2 + y^2 \to 0 \quad \text{per } (x,y,z) \to (0,0,0),$$

e quindi $f$ risulta essere continua nell'origine.
b) Calcoliamo le derivate parziali nell'origine usando la definizione:

$$\partial_x f(0,0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0,0) - f(0,0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t - t}{t} = 0$$
$$\partial_y f(0,0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t,0) - f(0,0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} t \sin\frac{1}{t^2} = 0$$
$$\partial_z f(0,0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0,t) - f(0,0,0)}{t} = 0.$$

Quindi $\nabla f(0,0,0) = (0,0,0)$.
c) Abbiamo la seguente stima:

$$\Big|\frac{f(x,y,z) - f(0,0,0) - \nabla f(0,0,0)\cdot(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big| \leq e^y \Big|\frac{\sin x - x}{x}\Big| + |e^y - (z+1)^2| + |y| \to 0 \quad \text{per } (x,y,z) \to (0,0,0),$$

e quindi $f$ risulta essere differenziabile nell'origine.
d) Calcoliamo la derivata parziale in $z$ di $f$ in punti diversi dall'origine:

$$\partial_z f(x,y,z) = -2x(z+1) - \frac{2y^2 z}{(x^2+y^2+z^2)^2} \cos\Big(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\Big).$$

Il primo termine tende a zero per $(x,y,z) \to (0,0,0)$, mentre il secondo termine non soddisfa questa proprietá. Prendiamo infatti la successione $(\frac{1}{\sqrt{3n}}, \frac{1}{\sqrt{3n}}, \frac{1}{\sqrt{3n}})$. Notiamo quindi che il secondo termine della somma calcolato lungo la successione produce $-\frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{n}\cos n$, che non converge a zero per $n \to +\infty$. Quindi $\partial_z f(x,y,z)$ non tende a $\partial_z f(0,0,0) = 0$ per $(x,y,z) \to (0,0,0)$, e quindi $f \notin C^1(\{0\})$.

**Esercizio** 2
a) Abbiamo che $F(0,0,0) = 0$ e

$$\partial_z F(0,0,0) = (1-x^2)^2 e^z + \sin z e^y \mid_{x=y=z=0} = 1 \neq 0.$$

Dal Teorema della Funzione Implicita abbiamo che esistono $\rho, r > 0$ piccoli ed una mappa $g : B_r(0,0) \to (-\rho,\rho)$ tali che $g(0,0) = 0$ e vale la rappresentazione:

$$\{(x,y,z) \in B_r(0,0) \times (-\rho,\rho) :\ F(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,g(x,y)) :\ (x,y) \in B_r(0,0)\}.$$

Poiché $T = 1$, possiamo scegliere $r, \rho > 0$ piccoli tali da soddisfare:

$$\sup_{B_r(0,0)} \big|(1-x^2)^2 - e^y + \cos x \ln(1+y)\big| \leq \frac{\rho}{2}, \qquad \sup_{B_r(0,0)\times(-\rho,\rho)} \big|1 - \sin z e^y - (1-x^2)^2 e^z\big| \leq \frac{1}{2}.$$

Per la prima stima, sviluppando il quadrato osserviamo che:

$$\big|(1-x^2)^2 - e^y + \cos x \ln(1+y)\big| \leq |1-e^y| + 2x^2 + x^4 + |\ln(1+y)| \leq 3|y| + 2x^2 + x^4 + |y| \leq 8r.$$

Basterá quindi prendere $r \le \frac{\rho}{16}$. Per la seconda stima, sempre sviluppando il quadrato otteniamo che:

$$\left|1 - \sin z e^y - (1-x^2)^2 e^z\right| \le |1-e^z| + e^y|\sin z| + 2x^2 e^z + x^4 e^z \le 3|z| + 3|z| + 9|x| \le 7\rho.$$

Basterá quindi prendere $\rho = \frac{1}{14}$ e $r = \frac{1}{224}$.
b) Poiché $(1-x^2)^2 e^{g(x,y)} - \cos g(x,y) e^y + \cos x \ln(1+y) \equiv 0$ in $B_r(0,0)$, possiamo derivare questa espressione in $x$ e $y$ per ottenere rispettivamente:

$$-4x(1-x^2)e^{g(x,y)} + (1-x^2)^2 e^{g(x,y)} \partial_x g(x,y) + \sin g(x,y) \partial_x g(x,y) e^y - \sin x \ln(1+y) \equiv 0,$$
$$(1-x^2)^2 e^{g(x,y)} \partial_y g(x,y) + \sin g(x,y) \partial_y g(x,y) e^y - \cos g(x,y) e^y + \frac{\cos x}{1+y} \equiv 0$$

per $(x,y) \in B_r(0,0)$. Calcolando tali espressioniper $(x,y) = (0,0)$ otteniamo

$$\partial_x g(0,0) = \partial_y g(0,0) = 0.$$

Derivando tali relazione ulteriormente in $x$ e $y$ e calcolandone poi il valore in $(0,0)$, otteniamo

$$\partial_{xx} g(0,0) = 4\,, \quad \partial_{xy} g(0,0) = 0\,, \quad \partial_{yy} g(0,0) = 2,$$

e quindi lo sviluppo cercato sará:

$$g(x,y) = 2x^2 + y^2 + o(x^2+y^2).$$

**Esercizio** 3
a) Consideriamo la funzione $f_1(x,y,z) = x+y+z^2$ su $D_+$. Poiché $\nabla f_1(,x,y,z) = (1,1,2z) \neq (0,0,0)$, abbiamo che la funzione $f_1$ non ammette punti critici liberi all'interno di $D_+$. La frontiera di $D_+$ si spezza in due componenti: $\{x^2+y^2+z^2 = 1\} \cap \{x > 0\}$, $\{(0,y,z) : y^2+z^2 \le 1\}$. Per quanto riguarda il primo insieme, studiamo i punti critici vincolati di $f_1$ sulla sfera unitaria prendendo poi in considerazione solo quelli con prima coordinata positiva. Dobbiamo quindi studiare:

$$1 = \lambda x,\ 1 = \lambda y,\ z(2-\lambda) = 0,\ x^2+y^2+z^2 = 1.$$

Dalla terza equazione otteniamo che: $z = 0$ e quindi $x = y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, oppure $\lambda = 2$, $x = y = \frac{1}{2}$ e quindi $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Prendendo in considerazione i punti con prima coordinata positiva, otteniamo i seguenti punti critici vincolati: $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e $Q_\pm = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$, su cui la funzione $f_1$ assume i valori:

$$f_1(P) = \sqrt{2} < f(Q_\pm) = \frac{3}{2}.$$

Per quanto riguarda il secondo insieme che compone la frontiera di $D_+$, consideriamo la restrizione di $f_1$ su $\{x = 0\}$: $g(y,z) = y+z^2$. Studiamo poi la funzione $g(y,z)$ nel disco 2-dimensionale $\{y^2+z^2 \le 1\}$. E' facile vedere che $g$ non ha punti critici liberi all'interno del disco. Passiamo quindi a studiare i punti critici vincolati di $g$ sulla sfera 2-dimensionale $\{y^2+z^2 = 1\}$. Il sistema

$$1 = \lambda y,\ z(2-\lambda) = 0, y^2+z^2 = 1$$

produce quattro soluzioni $M_\pm = (0,\pm 1, 0)$, $T_\pm = (0, \frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. Poiché $f_1(M_\pm) = \pm 1$, $f_1(T_\pm) = \frac{5}{4}$, otteniamo che:

$$\max_{D_+} f_1 = f_1(Q_\pm) = \frac{3}{2},\ \min_{D_+} f_1 = f_1(M_-) = -1.$$

b) La funzione $f_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ rappresenta il quadrato della distanza dall'origine. Quindi $0 \le f_2 \le 1$ sul disco 3-dimensionale $D_+ \cup D_-$ e $f_2(0,0,0) = 0$, $f_2 \equiv 1$ sulla sfera $\{x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Quindi:

$$\max_{D_-} f_2 = 1,\ \min_{D_-} f_2 = 0.$$

c) Poiché $f_1 \geq -1$ in $D_+$, $f_2 \geq 0$ in $D_-$, abbiamo che $f \geq -1$ su $D_+ \cup D_-$. Lungo la successione $M_t = (t, -1, 0)$, $t \to 0^+$, abbiamo che $f(M_t) = f_1(M_t) \to f_1(M_-) = -1$. Quindi $\inf_{D_+ \cup D_-} f = -1$ e l'estremo inferiore non viene mai raggiunto. Invece il massimo assoluto risulta essere in $Q_\pm$:

$$\max_{D_+ \cup D_-} f = f(Q_\pm) = \frac{3}{2}.$$

**Esercizio** 4
Il polinomio caratteristico $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ ha due radici complesse coniugate $1 \pm i$, e lo spazio delle soluzioni omogenee sará quindi generato da $e^x \cos x$, $e^x \sin x$.
Cerchiamo ora una soluzione particolare della forma $\bar{y}(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$. E' facile determinare le costanti: $A = -1$, $B = 2$. Quindi la soluzione generale del'equazione sará:

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x - \sin(2x) + 2\cos(2x).$$

Imponendo le condizioni iniziali, si deve avere $c_1 = -2$, $c_2 = 5$, e quindi la soluzione cercata sará:

$$y(x) = -2e^x \cos x + 5e^x \sin x - \sin(2x) + 2\cos(2x).$$

**Esercizio** 5
a) Poiché $\partial_y y = 1 = \partial_x x$, la forma $\omega_1$ è chiusa e dunque esatta. Un suo potenziale è dato dalla funzione $xy$. La forma $\omega$ non è chiusa come risulta da:

$$\partial_z x = 0 \neq 1 = \partial_y (y + z).$$

b) Poiché $\partial^+ S$ è il cerchio unitario $C$ nel piano $\{z = 0\}$, si vede facilmente che

$$\int_{\partial^+ S} \omega_2 = \int_C \omega_1 = 0$$

poiché la forma $\omega_1$ è esatta.
c) Abbiamo rot $F = (1, 0, 0)$. La mappa $\varphi : (x, y) \in D \to (x, y, 1 - x^2 - y^2) \in S$ parametrizza la superficie $S$, ove $D$ è il disco unitario 2-dimensionale. Poiché $\varphi_x = (1, 0, -2x)$, $\varphi_y = (0, 1, -2y)$ otteniamo che $\varphi_x \wedge \varphi_y = (2x, 2y, 1)$. Essendo $n = \frac{\varphi_x \wedge \varphi_y}{|\varphi_x \wedge \varphi_y|}$ e $d\sigma = |\varphi_x \wedge \varphi_y|$, otteniamo che in coordinate polari:

$$\int_S \text{rot } F \cdot n d\sigma = \int_D \text{rot } F \cdot (2x, 2y, 1) dxdy = \int_D 2x dxdy = 2 \left( \int_0^{2\pi} \cos\theta \right) \left( \int_0^1 \rho^2 d\rho \right) = 0.$$

**Esercizio** 6
Sia $\mathcal{E} = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$ l'ellisse del testo. Allora la mappa $\varphi : (x, y) \in \mathcal{E} \to (x, y, \frac{x^2}{2} + y^2) \in \Sigma$ parametrizza la superficie $\Sigma$. Si ha che $\varphi_x = (1, 0, x)$, $\varphi_y = (0, 1, 2y)$, $\varphi_x \wedge \varphi_y = (-x, -2y, 1)$ e $|\varphi_x \wedge \varphi_y| = \sqrt{1 + x^2 + 4y^2}$. Allora

$$\int_\Sigma y^2 d\sigma = \int_\mathcal{E} y^2 \sqrt{1 + x^2 + 4y^2} dxdy.$$

Parametrizziamo ora l'ellisse $\mathcal{E}$ tramite le "coordinate polari": $x = 2\rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, per $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [0, 1]$. Quindi

$$\int_\Sigma y^2 d\sigma = 2 \left( \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \right) \left( \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho \right) = \pi \int_0^1 s\sqrt{4s + 1} ds = \frac{\pi}{12} \left( 5\sqrt{5} + \frac{1}{5} \right).$$