AM2 - Tutorato I

Successioni di funzioni e serie di potenze

Martedì 4 ottobre 2005

Esercizio 1. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

$$\frac{n^2}{1+n^2x^2} \qquad \exp\left(-\frac{n^2}{1+n^2x^2}\right) \qquad \frac{\sin(n^2x)}{1+nx^2}$$

$$\frac{n^2\arctan\frac{1}{x}}{1+n^2x^2} \qquad \frac{x}{x+\arctan\frac{1}{nx}} \qquad \frac{\sin(nx)}{nx}$$

$$\exp\left(-\frac{1}{n^2x^2}\right) \qquad n^{-x} \qquad \frac{(n^2-x^2)^2}{(n^2-x^2)^2+1}$$

Esercizio 2. Sia $f_n(x) = nx\exp(-n^2x^2)$ verificare che:

a. f_n converge ad $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

b. f_n non converge uniformemente in $[0,1]$

c. $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$ e dedurne che la convergenza uniforme è una condizione sufficiente ma non necessaria per il passaggio al limite sotto segno di integrale.

Esercizio 3. Sia $f_n(x)$ una successione di funzioni continue in $I \subset \mathbb{R}$ convergente uniformemente in I verso f. Verificare che presa comunque $x_n \subset I$ con $x_n \to x$ si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$$

Esercizio 4. Trovare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{n!}$$