AM2 - Tutorato II

Serie di potenze

Venerdì 21 ottobre 2005

Esercizio 1. Trovare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\left(4+\frac{1}{n^4}\right)^n}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{3n^3+1} x^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+n^5}{(n+1)^7} \left(\frac{x}{5}\right)^n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n! \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

Esercizio 2. Verificare che la funzione

$$f = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ ma non è analitica in $x = 0$.

Esercizio 3. Supponiamo di trovarci nel piano complesso in 1 e di intraprendere una singolare passeggiata; muoviamoci di una unità di lunghezza verso l'alto, poi svoltiamo a sinistra e procediamo per mezza unita di lunghezza, poi sempre girando verso sinistra percorriamo $\frac{1}{3}$ dello spostamento precedente poi $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ e così via... dove arriviamo?

Esercizio 4. Considerare la funzione

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

e discutere in che modo essa agisce sulle rette parallele agli assi coordinati del piano complesso. Determinare inoltre le immagini delle regioni

$$A = \{z \in \mathbb{C};\ Re(z) < 0,\ 0 < Im(z) < \pi\}$$

$$B = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < Im(z) < \frac{\pi}{2}\}$$