Esercitazione AM2 n. 6 - A.A. 2005-2006 - 13/12/05

Domini normali ed integrali multipli

Calcolare i seguenti integrali doppi sui rispettivi domini normali:

1. $\iint_D \frac{\sin y^2}{y}\, dxdy$ con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y^2, 0 < y \le \sqrt{\pi}\}$.

2. $\iint_{x^2+y^2<1} (x - y)\cos(x^{20} + y^{20})\, dxdy$.

3. $\int_0^\pi \int_0^1 (x \sin y - x^2 y)\, dxdy$, e verificare che vale Fubini.

4. $\iint_D \frac{x^2}{y^2}\, dxdy$ con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2, \frac{1}{x} \le y \le x\}$.

5. $\iint_D y^3 e^x\, dxdy$ con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0, x \le 1, x \ge y^2\}$.

6. $\iint_D xy\, dxdy$ con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \ge 1, x^2 + y^2 \le 1\}$.

Soluzioni Esercitazione AM2 n. 6 - 13/12/05

1. Poiché $\frac{\sin y^2}{y} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$, la funzione integranda é prolungabile con continuitá su $\overline{D}$ ed é quindi integrabile. Passando al calcolo dell' integrale:

$$\iint_D \frac{\sin y^2}{y}\,dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi}}\int_0^{y^2} \frac{\sin y^2}{y}\,dxdy =$$
$$= \int_0^{\sqrt{\pi}} y\sin y^2\,dy = \left[-\frac{1}{2}\cos y^2\right]_0^{\sqrt{\pi}} = 1$$

2. L' integrale proposto é nullo in quanto la funzione integranda é dispari rispetto alla bisettrice del I e III quadrante ovvero $f(x,y) = -f(y,x)$ mentre il dominio d' integrazione D é simmetrico rispetto alla bisettrice stessa.

3.
$$\int_0^{\pi}\int_0^1 (x\sin y - x^2y)\,dxdy = \int_0^{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\sin y - \frac{x^3}{3}y\right]_0^1 dy =$$
$$= \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin y - \frac{1}{3}y\right)dy = 1 - \frac{\pi^2}{6}$$

Viceversa

$$\int_0^1\int_0^{\pi} (x\sin y - x^2y)\,dydx = \int_0^1\left[-x\cos y - x^2\frac{y^2}{2}\right]_0^{\pi} dx =$$
$$= \int_0^{\pi}\left(2x - \frac{\pi^2}{2}x^2\right)dx = 1 - \frac{\pi^2}{6}$$

4.
$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy = \int_1^2 x^2\,dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{y^2}\,dy = \frac{9}{4}$$

5. Il dominio D puó essere visto come dominio normale rispetto alle y cioé $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1, y^2 \le x \le 1\}$. Quindi:

$$\iint_D y^3 e^x \, dxdy = \int_0^1 y^3 \, dy \int_{y^2}^1 e^x \, dx = \int_0^1 y^3 (e - e^{y^2}) \, dy =$$
$$= \frac{e}{4} - \int_0^1 y^3 e^{y^2} \, dy = \frac{e}{4} - \int_0^1 y^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dy} (e^{y^2}) \, dy =$$
$$\frac{e}{4} - \frac{e}{2} + \int_0^1 y e^{y^2} \, dy = \frac{e}{4} - \frac{1}{2}$$

6. Il dominio D puó essere visto come dominio normale rispetto alle x cioé $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$. Quindi:

$$\iint_D xy \, dxdy = \int_0^1 x \, dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy =$$
$$= \int_0^1 x \left(\frac{1 - x^2}{2} - \frac{(1 - x)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2}$$