Esercitazione AM2 n. 4 - A.A. 2005-2006 - 18/11/05

Differenziabilitá di funzioni di piú variabili

1. Mostrare che é continua ma non differenziabile nell' origine la funzione

$$f(x,y)\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2. Verificare che la funzione $f(x,y)=|xy|^\alpha$ con $\alpha>0$ é differenziabile nell' origine se e solo se $\alpha>\frac{1}{2}$.

3. Stabilire se é continua, derivabile, differenziabile in $(0,0)$ la funzione $f(x,y)=\frac{1-\cos(xy)}{x^4+y^4}$.

4. Stabilire se ammette un prolungamento continuo, derivabile o differenziabile nell' origine la funzione $f(x,y)=x+\log\left(\frac{x^2+3y^2}{x^2+y^2}\right)$.

5*. Stabilire dove é differenziabile la funzione

$$f(x,y)\begin{cases}\arctan\frac{x}{y} & y\neq 0\\ \frac{\pi}{2} & y=0\end{cases}$$

6. Studiare per ogni $x\in\mathbb{R}^N$ la continuitá, differenziabilitá, derivabilitá e continuitá delle derivate parziali della funzione

$$f(x)=\begin{cases}|x|^2\sin\frac{1}{|x|} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

Soluzioni Esercitazione AM2 n. 4 - 18/11/05

1. Dalla disuguaglianza $2|xy| \leq (x^2+y^2)$ segue subito la continuitá in $(0,0)$. Notiamo che $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ dato che $f(x,0) = f(0,y) \equiv 0$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$. Peró f non é differenziabile nell'origine perché non esiste $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{h^2+k^2}$ (tale limite é per esempio 0 nella direzione $(h,k) = (0,t)$ e vale $\frac{1}{2}$ nella direzione $(h,k) = (t,t)$).

2. Poiché f é identicamente nulla sugli assi coordinati, abbiamo $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Bisogna quindi calcolare il $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|hk|^\alpha}{\sqrt{h^2+k^2}}$. Nelle direzioni $(h,k) = (t,t)$ tale limite vale ∞ per ogni $\alpha < \frac{1}{2}$ e vale $\frac{1}{\sqrt{2}}$ per $\alpha = \frac{1}{2}$. Quindi f non é differenziabile per tali valori di α, mentre per $\alpha > \frac{1}{2}$ si ha $\frac{|hk|^\alpha}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq (h^2+k^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$, da cui f é differenziabile nell'origine.

3. Ricordando che $1 - \cos t = \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$, facendo il limite sulle rette $y = mx$ si vede subito che $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \frac{m^2}{2(1+m^4)}$, da cui f non é continua né differenziabile nell' origine. Peró essendo f identicamente nulla sugli assi coordinati, f é derivabile parzialmente e $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

4. Notiamo che $f(0,y) \equiv \log 3$ mentre $f(x,0) \equiv 0$, quindi f non ammette prolungamento continuo né tantomeno differenziabile in $(0,0)$. Ponendo $f(0,0) = \log 3$, otteniamo che $f_x \equiv 1$ esiste continua anche in $(0,0)$, mentre ponendo $f(0,0) = 0$ é $f_y \equiv 0$ ad esistere ed essere continua anche in $(0,0)$. Pertanto, $f(x,y)$ é derivabile con continuitá rispetto ad una sola delle variabili in base al prolungamento scelto.

5. La funzione é chiaramente differenziabile per ogni $y \neq 0$, e risulta continua e differenziabile in $(x,0)$ solo se $x > 0$. Infatti ricordando che $\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \pm\frac{\pi}{2}$ per $t \gtrless 0$ e passando a coordinate polari, $f(\rho,\vartheta) = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ per $\vartheta \neq 0, \pi$ e $f(\rho,0) = f(\rho,\pi) = \frac{\pi}{2}$, che é continua é differenziabile solo per $\rho \neq 0$ e $\vartheta \neq \pi$.

6. Ponendo $t = |x|$, si verifica facilmente che la funzione di una variabile $f(t) = t^2 \sin\frac{1}{t}$, $f(0) = 0$ é continua e derivabile su tutto

$\mathbb{R}$ cosicché $f(x)$ risulta continua, derivabile e differenziabile per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ con $f_{x_i}(0) = 0$ per ogni $i = 1, ..N$. Peró le derivate parziali di f non sono continue in $x = 0$: infatti $f_{x_i} = 2x_i \sin \frac{1}{|x|} - \frac{x_i}{|x|} \cos \frac{1}{|x|}$ non ha limite per $x \to 0$.