Esercitazione AM2 n. 3 - A.A. 2005-2006 - 24/10/05

Serie di Taylor

1. Stabilire se é analitica su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{per } |x| < 1 \\ 0 & \text{per } |x| \geq 1 \end{cases}$$

2. Determinare lo sviluppo in serie della funzione $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ per $|x| < 1$.

3. Sviluppare in serie di Taylor la funzione $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$ per $|x| < 2$.

4. Sviluppare la funzione $f(x) = \frac{4}{1+2x+3x^2}$ per $x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

5. Sviluppare in serie $f(x) = \log x$ per $x \in (0, 2)$.

Logaritmo e potenze ad esponente complesso

6. Mostrare che $Log(i-1)^2 \neq 2Log(i-1)$.

7. Determinare tutte le soluzioni $e^z = -\frac{i}{2}$.

8. Determinare tutti i possibili valori 1^{1-i}.

Soluzioni Esercitazione AM2 n. 3 - 24/10/05

1. La funzione é chiaramente C^∞ su $\mathbb{R}$, ma non é sviluppabile in serie di Taylor in $x = \pm 1$ perché $f^{(n)}(\pm 1) = 0$ per ogni $n \geq 0$ mentre $f > 0$ per $|x| < 1$.

2. Notando che $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ e ricordando che per α non intero

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

derivando si ottiene che

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2n \binom{\frac{1}{2}}{n} x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n+1}$$

.

3. Utilizzando la serie geometrica si ottiene $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}} x^{2n}$, per $|x| < 2$.

4. Spezzare la frazione

$$f(x) = \frac{4}{1+2x+3x^2} = \frac{4}{(1-x)(1+3x)} = \frac{1}{1-x} + \frac{3}{1+3x}$$

. Utilizzando la serie geometrica per $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ abbiamo

$$f(x) = \frac{4}{1+2x+3x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n 3^{n+1}] x^n$$

5. Essendo logaritmo una primitiva di $\frac{1}{x}$ si ha

$$\log x = \int \frac{1}{1-(1-x)}\, dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

6. Abbiamo $i - 1 = \sqrt{2} e^{i3\pi/4}$ da cui

$$2Log(i-1) = 2\left(\frac{1}{2}\log 2 + i\frac{3\pi}{4}\right) = \log 2 + i\frac{3\pi}{2}$$

Invece

$$Log(i-1)^2 = Log(-2i) = \log 2 - i\frac{\pi}{2}$$

7. In forma trigonometrica

$$-\frac{i}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})\right)$$

da cui

$$Log(-\frac{i}{2}) = -\log 2 - i\frac{\pi}{2}$$

Dunque le soluzioni cercate sono

$$z = -\log 2 - i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i$$

8. Abbiamo $1^{1-i} = e^{(1-i)(\log 1 + 2k\pi i)} = e^{(1-i)2k\pi i} = e^{(1+i)2k\pi} = e^{2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.