AM2: Tracce delle lezioni-III settimana

Serie di funzioni: esempi e complementi.

1. (serie geometrica e suoi derivati).

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \;=\; \frac{1}{1-x} \qquad \text{sse} \quad |x|<1$$

La convergenza é totale in $[-\delta,\delta]\ \forall\,\delta<1$ (non é uniforme in $[1-\delta,1]$: la funzione somma della serie non é limitata attorno ad 1!). In particolare, se $|x|<1$:

$$(i) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}\,dt \;=\; \int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\right]dt \;=\; \int_0^x \frac{dt}{1-t} \;=\; -\log(1-x)$$

Ad esempio, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n} \;=\; \log 2$, $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \;=\; \log(1+x)\ \forall\ x\in(-1,1)$.

$$(ii) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{x}\int_0^x \frac{t^n}{n}\,dt\right] \;=\; \frac{1}{x}\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\right]dt \;=$$

$$=\; -\frac{1}{x}\int_0^x \log(1-t)\,dt \;=\; \frac{(1-x)\log(1-x)\;+\;x}{x} \qquad \forall x\in[-1,1]$$

perché $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^n}{n(n+1)}\right| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n(n+1)}\right|\ \forall x\in[-1,1]$. Ad esempio, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)} \;=\; 1-2\log 2$.

$$(iii) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \;=\; x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}x^n \;=\; x\,\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right] \;=\; x\,\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1-x}\right] \;=\; \frac{x}{(1-x)^2}$$

$\forall x\in(-1,1)$. Ad esempio, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} \;=\; 2$.

$$(iv) \qquad \arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n\Big]dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$(v) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}} \;=\; \frac{1}{k!}\int_0^{\infty}\frac{t^k}{e^t-1}\,dt \qquad \forall k\in\mathbf{N}$$

É $\int\limits_0^{\infty}\frac{t^k}{e^t-1}\,dt \;=\; \int\limits_0^{\infty}\frac{t^ke^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt \;=\; \int\limits_0^{\infty}t^ke^{-t}\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-tn}\,dt \;=\; \sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}t^ke^{-(n+1)t}\,dt$. Posto $(n+1)t=s$, si ottiene $\int\limits_0^{\infty}t^ke^{-(n+1)t}\,dt \;=\; \frac{1}{(n+1)^{k+1}}\int_0^{+\infty}s^k\,e^{-s}\,ds \;=\; \frac{k!}{(n+1)^{k+1}}$

2. Sia $a_n \geq r a_{n+1} \geq 0 \ \forall \ n \in \mathbf{N}, \ r > 0$ raggio di convergenza di $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Se la serie converge per $x = -r$, allora converge uniformemente in $[-r, 0]$. In particolare,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \rightarrow_{x \to -r^+} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n r^n$$

Ció segue dal criterio di Leibnitz: $a_{n+1} r^n \rightarrow_n 0$ perché $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n r^n$ converge e

$$a_{n+1}|x| \ \leq a_{n+1} r \ \leq a_n \ \Rightarrow \ a_{n+1}|x|^{n+1} \ \leq \ a_n |x|^n$$

Esempi. $-\log(1-x) \ = \ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \rightarrow_{x \to -1^+} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \ \Rightarrow \ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \ = \ \log 2.$

Analogamente, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \ = \ \lim\limits_{x \to 1^-} \ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \, x^{2n+1} \ = \ \arctan 1 \ = \ \frac{\pi}{4}.$

La proprietá in 2. é un caso particolare del

Teorema di Abel Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge in $x = 1$, allora converge uniformemente in $[0, 1]$. In particolare $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n \rightarrow_{x \to 1^-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n.$

3. $\sum_n f_n$ converge uniformemente in $E \ \Rightarrow \ f_n \rightarrow_n 0$ uniformemente in E

Ció segue immediatamente dalla condizione (necessaria) di Cauchy.

Consideriamo, ad esempio, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{1+n^4x^4}$. Tale serie converge per ogni $x \in \mathbf{R}$, e la convergenza é totale in $|x| \geq \delta > 0$, perché

$$\max_{|x| \geq \delta} \ |\frac{\sin(nx)}{1+n^4x^4}| \ \leq \ \max_{|x| \geq \delta} \ \frac{1}{1+n^4x^4} \ = \ \frac{1}{1+n^4\delta^4} \ \Rightarrow \ \sum_{n=0}^{\infty} \ \max_{|x| \geq \delta} \ |\frac{\sin(nx)}{1+n^4x^4}| \ < +\infty$$

La convergenza non é invece uniforme in $|x| \leq \delta$, perché $\frac{|\sin(nx)|}{1+n^4x^4}$ non converge uniformemente a zero in $|x| \leq \delta$: $n \geq \frac{1}{\delta} \ \Rightarrow \ \max\limits_{|x| \leq \delta} \ |\frac{\sin(nx)}{1+n^4x^4}| \ \geq \ \sin 1.$

Che la convergenza non possa essere uniforme si vede anche dal fatto che

$$S(x) : \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{1+n^4x^4} \qquad \text{non é continua in } \ x = 0$$

perché $S(\frac{1}{N}) \ \geq \ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\sin(n\frac{1}{N})}{1+\frac{n^4}{N^4}} \right| \ \geq \ \frac{\sin(N\frac{1}{N})}{1+\frac{N^4}{N^4}} = \frac{\sin 1}{2}$ mentre $S(0) = 0.$

4. $f_n \in C([a,b])$, $\sum_n f_n$ converge uniformemente in $(a,b] \Rightarrow \sum_n f_n(a)$ converge. Infatti:

$S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} f_j(x)$ é Cauchy uniforme in $(a,b]$: $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \leq \epsilon \ \forall n \geq n_\epsilon, \ p \in \mathbf{N}, \ x \in (a,b]$.

Per continuitá si ha quindi $|S_{n+p}(a) - S_n(a)| \leq \epsilon \ \forall n \geq n_\epsilon, \ p \in \mathbf{N}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} < +\infty \Leftrightarrow x > 1$. Da $\sup_{x \geq x_0 > 1} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^{x_0}}$ segue che la serie converge totalmente in $[x_0, +\infty)$, $\forall x_0 > 1$.

La convergenza non é peró uniforme in $(1,+\infty)$, perché la serie diverge in $x=1$, od anche perché $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \rightarrow_{x \to 1^+} = +\infty$. Infatti

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

La funzione $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ é $C^\infty((1,+\infty))$. Infatti la serie delle derivate k-esime, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\log n)^k}{n^x}$ é totalmente convergente in $[1+\delta, +\infty)$:

$$x \geq 1+\delta \Rightarrow \frac{(\log n)^k}{n^x} \leq \frac{(\log n)^k}{n^{1+\delta}} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{n^{1+\delta}} < +\infty$$

Una rappresentazione integrale di f: $\Gamma(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, dt$ ove $\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} \, e^{-t} \, dt$ é la **funzione Gamma di Eulero**. É $\int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t-1} \, dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1} e^{-t}}{1-e^{-t}} \, dt = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-tn} \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-(n+1)t} \, dt$. Posto $(n+1)t = s$, si ottiene $\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-(n+1)t} \, dt = \frac{1}{(n+1)^x} \int_0^{+\infty} s^{x-1} \, e^{-s} \, ds = \frac{\Gamma(x)}{(n+1)^x}$

6. $\int_1^{+\infty} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x \log n} \right) dx < +\infty$. Infatti $\int_1^{+\infty} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x \log n} \right) dx =$

$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\int_1^{+\infty} \frac{dx}{n^x \log n} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} \left[\frac{e^{-x \log n}}{-\log n} \right]_1^{\infty} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n} < +\infty$ perché $\frac{1}{n \log^2 n} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x \log^2 x} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n} \leq \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log^2 x} = \left[-\frac{1}{\log x} \right]_2^{\infty} = \frac{1}{\log 2}$.

7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^r e^{-nx} = \frac{x^r}{1-e^{-x}}$, $x > 0$. La convergenza é totale in $(0, +\infty)$ se $r > 1$:

$(x^r e^{-nx})' = r x^{r-1} e^{-nx} - n x^r e^{-nx} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{r}{n} \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \geq 0} x^r e^{-nx} = (\frac{r}{n})^r e^{-r}$

La convergenza non é uniforme in $(0, +\infty)$ se $r \leq 1$: la serie converge infatti, con somma zero, in $x = 0$, mentre $\lim_{x \to 0} f(x) > 0$ se $r \leq 1$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}$ converge totalmente sui limitati: $|\frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}| \leq \frac{|x|}{n^2}$, ma non converge uniformemente in $\mathbf{R}$, perché la successione delle somme parziali $S_N(x) := \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}$ non é Cauchy uniforme:

$$S_{2N}(N) - S_{N-1}(N) \; = \; \sum_{N}^{2N} \frac{1}{n} \; \sin \frac{N}{n} \; \geq \; \sin \frac{1}{2} \; \sum_{N}^{2N} \frac{1}{n} \; \geq \; \frac{1}{2} \; \sin \frac{1}{2}$$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \, e^{-\frac{x^2}{n}}$ converge uniformemente sui limitati (ma non totalmente: la serie é assolutamente divergente $\forall \, x$!). Infatti

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{t}} \, e^{-\frac{x^2}{t}} \; = \; \frac{e^{-\frac{x^2}{t}}}{t^2 \sqrt{t}} \, [x^2 - \frac{t}{2}] \; < \; 0 \quad \text{se} \quad x^2 < \frac{t}{2} \quad \Rightarrow$$

$$a_{n-1}(x) \; \leq \; a_n(x) \quad \text{se} \quad n \leq 2x^2, \quad a_{n+1}(x) \; \leq a_n(x) \quad \text{se} \quad n \geq 2x^2$$

ove $a_n(x) \; := \; \frac{1}{\sqrt{n}} \, e^{-\frac{x^2}{n}}$. Quindi, $|x| \leq M \quad \Rightarrow \quad a_{n+1}(x) \; \leq \; a_n(x)$ se $n > 2M^2$ ed é quindi applicabile il criterio di Leibnitz al punto 6.

La convergenza é uniforme su tutto $\mathbf{R}$: posto $n_x \; := \; \max\{n : \, n < 2x^2\}$, risulta

$$\forall x : \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n(x) \; = \; \sum_{n=1}^{n_x} (-1)^n a_n(x) + \sum_{n > n_x} (-1)^n a_n(x) \qquad \text{e, se} \quad 1 \leq p \leq n_x$$

$$|\sum_{k=p}^{n_x} (-1)^k a_k(x)| \leq a_{n_x}(x), \quad |\sum_{k > n_x} (-1)^k a_k(x)| \leq a_{n_x}(x), \quad |a_{n_x}(x)| \leq \epsilon \quad \text{se} \quad |x| \geq \frac{1}{\epsilon}$$

La serie é derivabile termine a termine: $\frac{d}{dx} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \, e^{-\frac{x^2}{n}} \; = \; 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}} \, x \, e^{-\frac{x^2}{n}}$

Infatti la serie delle derivate é totalmente convergente sui limitati:

$$|x| \leq M \quad \Rightarrow \quad |\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}} \, x \, e^{-\frac{x^2}{n}}| \; \leq \; M \frac{1}{n\sqrt{n}}$$