AM2: Tracce delle lezioni- IX Settimana

DERIVATE SUCCESSIVE

Sia $f \in C^1(O)$, $O \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Se f_{x_j} sono a loro volta derivabili, allora

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

sono le derivate seconde.

Se $f_{x_i x_j} \in C(O)$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$, f si dice di classe $C^2(O)$.

LEMMA DI SCHWARTZ

$$f \in C^2(O) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

Prova. Sia, per semplicitá, $n = 2$. Sia $D_r(x_0, y_0) \subset O$, $\delta << r$, $R_\delta := [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$. Si ha:

$$\frac{1}{4\delta^2} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left(\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy \right) dx = \frac{1}{4\delta^2} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0 + \delta) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0 - \delta)]\, dx =$$

$$\frac{1}{4\delta^2} \, [f(x_0 + \delta, y_0 + \delta) - f(x_0 - \delta, y_0 + \delta) - f(x_0 + \delta, y_0 - \delta) + f(x_0 - \delta, y_0 - \delta)] =$$

$$= \frac{1}{4\delta^2} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} [\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \delta, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 - \delta, y)]\, dy = \frac{1}{4\delta^2} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx \right) dy$$

Applicando due volte il teorema della media, otteniamo

$$\exists (x_\delta, y_\delta) \in R_\delta : \frac{1}{4\delta^2} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left(\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy \right) dx = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x_\delta, y_\delta)$$

$$\exists (x^\delta, y^\delta) \in R_\delta : \frac{1}{4\delta^2} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx \right) dy = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x^\delta, y^\delta)$$

Mandando δ a zero, (x_δ, y_δ), (x^δ, y^δ) vanno a (x_0, y_0) e quindi $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

MATRICE HESSIANA

Sia $f \in C^2(O)$ ed indichiamo con $u = (x_1, \ldots, x_n)$ i punti di $\mathbf{R}^n$. La matrice $n \times n$ delle derivate seconde

$$H_f(u) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(u) \right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

é detta matrice Hessiana .

Dal Lemma di Schwartz: H_f é **matrice simmetrica**.

FORMULA DI TAYLOR (al secondo ordine)

Sia $f \in C^2(D_r(u))$. Allora:

$$f(u+h) \;=\; f(u) + \;< \nabla f(u)\,,\, h > \;+ \frac{1}{2} < H_f(u)\, h,\; h > \;+\; \circ\,(||h||^2)$$

Prova. Sia $u = (x_1, \ldots, x_n)$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Posto $\varphi(t) := f(u+th)$, é

$$\varphi(0) \;=\; f(u), \quad \varphi(1) \;=\; f(u+th), \qquad \frac{d\varphi}{dt} \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(u+th)h_j$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(u+th)h_j \;=\; \sum_{j=1}^{n}\,\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j \;=< H_f(u\;+\;t\,h)\,h,\; h >$$

Basta quindi sostituire in $\varphi(1) \;=\; \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,dt$ per ottenere

$$f(u+h) \;=\; f(u) \;+\; < \nabla f(u)\,,\, h > \;+\; \frac{1}{2} < H_f(u)h, h > \;+$$

$$\int_0^1 (1-t) \;<\; [H_f(u+th) \;-\; H_f(u)]\,h, h > \; dt.$$

La stima del resto segue da

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta_\epsilon > 0 : \;\; |t| \le \delta_\epsilon \;\;\Rightarrow\;\; |f_{x_i x_j}(u+th) - f_{x_i x_j}(u)| \le \epsilon \;\;\Rightarrow$$

$$|\sum_{i,j=1}^{n} \left[f_{x_i x_j}(u+th) - f_{x_i x_j}(u) \right] \; h_i h_j \;| \;\le n\epsilon ||h||^2$$

MASSIMI E MINIMI IN PIÚ VARIABILI

$u \in \mathbf{R}^n$ é **minimo locale libero** per $f \;\Leftrightarrow\; \exists\delta > 0: \;\; f(u) \leq f(v) \;\; \forall v \in D_\delta(u)$

Condizioni necessarie. Se $u \in \mathbf{R}^n$ é **minimo locale libero** per f, allora

(i) $f \in C^1(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(u) \,=\, 0$

(ii) $f \in C^2(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad < H_f(u)\, h,\; h > \geq\; 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$

Prova. (i) $h \in \mathbf{R}^n, \quad |t| \leq \delta_h \quad \Rightarrow \quad f(u) \leq f(u+th) \quad \Rightarrow$

$$0 \;=\; \tfrac{d}{dt}\, f(u+th)_{|t=0} \;=< \nabla f(u), h > \quad \Rightarrow \quad \nabla f(u) \;=\; 0.$$

(ii) Dalla formula di Taylor: $\quad \nabla f(u) \;=\; 0, \quad 0 \;\leq\; f(u+h) - f(u) \;=$

$$\nabla f(u) + ||h||^2\, [< H_f(u)\, \frac{h}{||h||}, \frac{h}{||h||} > \;+\; \circ\,(1)] \quad \Rightarrow \quad < H_f(u)\, \frac{h}{||h||}, \frac{h}{||h||} \;>\; \geq\; 0$$

Una condizioni sufficente. Sia $f \in C^2(D_r(u))$, e $\nabla f(u) = 0$:

$$< H_f(u)\, h, h > \; > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n,\; h \neq 0, \quad \Rightarrow \quad u \quad \text{é minimo locale}$$

Prova. $h \rightarrow < H_f(u) h, h >$ continua, $< H_f(u) h, h > \; > \; 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n, h \neq 0, \;\Rightarrow$

$$\exists\, m :=\; \min_{\|h\|=1} \; < H_f(u)\, h, h > \; > \; 0$$

Quindi, $< H_f(u)\, h, h > \;\geq\; m\, \|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$. Allora, usando Taylor e $\nabla f(u) = 0$ vediamo che $0 < \|h\| \; << \; 1 \;\Rightarrow$

$$f(u+h) - f(u) \;=\; \|h\|^2 \; [< H_f(u)\, \frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} > \;+\; \circ\,(1)] \;\geq\; \|h\|^2 \; [m \,+\, \circ(1)] \;>\; 0$$

Massimi locali liberi Se invece $\exists\delta > 0: \;\; f(u) \geq f(v) \;\; \forall v \in D_\delta(u)$, u si dice massimo locale libero per f. Anche in tal caso, se $f \in C^1(D_r(u))$, necessariamente $\nabla f(u) = 0$, mentre, se $f \in C^2(D_r(u))$, allora $< H_f(u)\, h,\; h > \leq\; 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$.

Analogamente, la condizione sufficente perché u sia massimo locale libero per $f \in C^2(D_r(u))$ é che

$$\nabla f(u) = 0 \quad \text{e} \quad < H_f(u)\, h, h > \; < 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n,\; h \neq 0$$

FUNZIONI IMPLICITE E TEOREMA DEL DINI

Teorema del Dini o della funzione implicita: $n = 2$.

Sia $f \in C^1(O)$, O aperto in $\mathbf{R}^2$, $(x_0, y_0) \in O$. Sia

$R_{\delta,\sigma}(x_0, y_0) := [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma] \subset O.$ Allora

$$f_y(x_0, y_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, \delta,\ \sigma > 0, \quad \exists\ \varphi \in C^1((x_0 - \delta, x_0 + \delta), (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)) :$$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0), \quad (x, y) \in R_{\delta,\sigma}(x_0, y_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \varphi(x)$$

$$f_x(x_0, y_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, \delta,\ \sigma > 0, \quad \exists\ \varphi \in C^1((x_0 - \delta, x_0 + \delta), (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)) :$$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0), \quad (x, y) \in R_{\delta,\sigma}(x_0, y_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \varphi(y)$$

Inoltre,

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}, \qquad\qquad (\varphi'(y) = -\frac{f_y(\varphi(y), y)}{f_x(\varphi(y), y)})$$

Prova. Sostituendo f con $f(x + x_0, y + y_0) - f(x_0, y_0)$, possiamo supporre $x_0 = y_0 = 0$, $f(0, 0) = 0$ e $f_y(0, 0) > 0$. Scriviamo $R_{\delta,\sigma} = R_{\delta,\sigma}(0, 0)$. Allora

$\exists\, \delta',\ \sigma,\ r > 0 :$ $\quad f_y \geq r > 0$ in $R_{\delta,\sigma}$ e quindi $\quad f(0, -\sigma) < 0 < f(0, \sigma)$

e quindi $\quad \exists\, \delta \leq \delta' : \quad |x| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad f(x, -\sigma) < 0 < f(x, \sigma)$ $\quad$ e quindi

$$|x| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \exists!\ y = \varphi(x) \in [-\sigma, \sigma] \quad \text{tale che} \quad f(x, \varphi(x)) = 0$$

Verifichiamo ora che φ é continua, ed infatti $\varphi \in C^1((-\delta, \delta))$:

$$0 \equiv f(x + s, \varphi(x + s)) - f(x, \varphi(x)) = \int_0^1 \frac{d}{dt}[f(x + ts, t\varphi(x + s) + (1 - t)\varphi(x))]\, dt$$

$$\Rightarrow \quad [\varphi(x + s) - \varphi(x)] \int_0^1 f_y(x + ts, t\varphi(x + s) + (1 - t)\varphi(x))dt =$$

$$-\int_0^1 f_x(x + ts, t\varphi(x + s) + (1 - t)\varphi(x))\, s\, dt \quad \Rightarrow \quad |\varphi(x + s) - \varphi(x)| \leq \frac{O(s)}{r}$$

e quindi, dividendo per s e passando al limite sotto segno di integrale,

$$[\lim_{s \to 0} \frac{\varphi(x + s) - \varphi(x)}{s}]\ f_y(x, \varphi(x)) = -f_x(x, \varphi(x))$$

NOMENCLATURA. La funzione φ, che si trova risolvendo l'equazione $f(x,y)=0$ considerando y come dato e x come incognita (o viceversa), si chiama **funzione implicitamente definita** dall'equazione $f(x,y)=0$.
Da $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$ segue anche che $f \in C^\infty(O) \Rightarrow \varphi \in C^\infty$.

$u_0 \in O$ é **punto regolare** se $\nabla f(u_0) \neq 0$
$u_0 \in O$ é **punto singolare, critico, stazionario** se $\nabla f(u_0) = 0$
$\Gamma_c := \{(x,y): f(x,y)=c\} = f^{-1}(c)$, $c \in \mathbf{R}$ é **insieme di livello** di f. Se $\nabla f(u) \neq 0, \forall u \in \Gamma_c$, c si chiama **valore (o livello) regolare** di f: un livello é regolare se non contiene punti singolari (altrimenti é singolare, critico, stazionario).

Dal Teorema del Dini:

-l'insieme di livello $\Gamma_c = \{f = c\}$ é, attorno a un punto regolare u_0, il grafico di una funzione regolare φ (nella variabile x od y) e la retta tangente alla curva di livello Γ_c in u_0 ha equazione $< \nabla f(u_0), u - u_0 >= 0$,

-in particolare, $\nabla f(u_0)$ é ortogonale (in u_0) alla curva di livello $\{f(u) = f(u_0)\}$

-se c é valore regolare, Γ_c é **curva (cartesiana) regolare** , ovvero é, attorno ad ogni suo punto, un grafico cartesiano

Teorema del Dini o della funzione implicita: il caso generale

Sia $f \in C^1(O)$, O aperto in $\mathbf{R}^{n+1}$, $\overline{u} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n+1}) \in O$, $f(\overline{u}) = 0$.

Sia $R_{\delta,\sigma}(\overline{u}) := D_\delta(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \times [x_{n+1} - \sigma, x_{n+1} + \sigma] \subset O$. Se $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\overline{u}) \neq 0$

allora l'insieme degli zeri di f, in un $R_{\delta,\sigma}(\overline{u})$ opportuno é grafico cartesiano, ovvero

$$\exists\, \delta, \sigma > 0, \quad \exists \varphi \in C^1(D_\delta(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n), [x_{n+1} - \sigma, x_{n+1} + \sigma]) :$$

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0, \quad (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in R_{\delta,\sigma}(\overline{u}) \qquad \Leftrightarrow \qquad x_{n+1} = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

Inoltre, φ é di classe C^1. In particolare,

$$f(x_1, \ldots, x_n, \varphi(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_{x_j} = -\frac{f_{x_j}}{f_{x_{n+1}}} \qquad \forall j = 1, \ldots, n$$

PRINCIPIO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Siano $f, g \in C^1(O)$, e sia $\Gamma = \{g = 0\}$.
Sia $u_0 \in \Gamma$ tale che $f(u_0) \le f(u) \ \forall u \in \Gamma$. Se $\nabla g(u_0) \neq 0$ allora

$$\exists\, \lambda \in \mathbf{R} : \qquad \nabla f(u_0) = \lambda \nabla g(u_0)$$

Infatti, intorno ad $u_0 = (x_0, y_0)$, il **vincolo** Γ si scrive, in base al Teorema del Dini ed all'ipotesi su Γ, come, diciamo, $(x, \varphi(x))$ ove φ é una funzione C^1 intorno ad x_0. Ma allora $x \to f(x, \varphi(x))$ ha un minimo in x_0 e quindi

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, \varphi(x))_{|x=x_0} = f_x(u_0) + f_y(u_0)\varphi'(x_0) = f_x(u_0) - f_y(u_0) \frac{g_x(u_0)}{g_y(u_0)}$$

Posto $\lambda := \frac{f_y(u_0)}{g_y(u_0)}$ si ha quindi $f_x(u_0) = \lambda g_x(u_0)$ e cioé $\nabla f(u_0) = \lambda \nabla g(u_0)$.

Funzioni Implicite e Moltiplicatori di Lagrange: esempi

1. Sia $g(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$, $\Gamma = g^{-1}(0)$, $d(x, y) = (x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + y^2$

Determinare $\qquad m := \inf_{\Gamma} d, \qquad M := \sup_{\Gamma} d.$

Siccome Γ é compatto e d é continua, m, M sono finiti, e sono infatti il minimo/massimo valore di d su Γ. Tali valori dovranno essere presi o nel punto singolare di Γ, cioé $(0, 0)$, oppure in (x, y), soluzione del sistema di Lagrange $\nabla d = \lambda \nabla g$, $g = 0$. Siccome $\nabla d = 0 \iff x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = 0$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ non appartiene a Γ, dovrá essere $\lambda \neq 0$ e il sistema si riscrive

$$x(x^2 + y^2) - x = \lambda(x - \frac{\sqrt{2}}{2}), \quad y(x^2 + y^2) + y = \lambda y, \quad (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$$

Dalla seconda equazione: $y = 0$ oppure $x^2 + y^2 + 1 = \lambda$ (e in tal caso $\lambda > 1$).

Se $y = 0$, da $0 = g(x, 0)$ segue $x = \pm\sqrt{2}$.

Se $y \neq 0$, ponendo $x^2 + y^2 = \lambda - 1$ nella prima equazione, otteniamo $\lambda = 2\sqrt{2}x$, mentre, da $g = 0$ otteniamo $\lambda^2 + 1 = 4x^2 + 2$ e quindi $x = \pm\frac{1}{2}$ e siccome deve essere $\lambda > 1$, troviamo le soluzioni $x = \frac{1}{2}$ $y = \pm(\sqrt{2} - \frac{5}{4})^{\frac{1}{2}}$.

Ora, d raggiunge il suo minimo/massimo su Γ o in un punto singolare di Γ o in una soluzione del sistema di Lagrange, ovvero in uno dei punti

$$(0, 0), \qquad (\pm\sqrt{2}, 0), \qquad (\frac{1}{2}, \pm(\sqrt{2} - \frac{5}{4})^{\frac{1}{2}}$$

Siccome $d(0, 0) = \frac{1}{2}$ e

$$d(\frac{1}{2}, \pm(\sqrt{2} - \frac{5}{4})^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1), \qquad d(\sqrt{2}, 0) = \frac{1}{2}, \qquad d(-\sqrt{2}, 0) = \frac{9}{2}$$

concludiamo che $m = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ed é realizzato in $(\frac{1}{2}, \pm(\sqrt{2}-\frac{5}{4})^{\frac{1}{2}})$, mentre $M = \frac{9}{2}$ é realizzato in $(-\sqrt{2}, 0)$.

2 Sia $g(x,y) = 4y^2 - x^4(1+4y) + 2x^6$, $\quad f(x,y) = y + x^2 \quad \Gamma = g^{-1}(0)$.

Calcolare
$$m := \inf_{\Gamma} f$$

Siccome $4y^2 + 2x^6 = x^4(1+4y) \Rightarrow y \geq -\frac{1}{4}$, é $y + x^2 \geq x^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \quad \forall\ (x,y) \in \Gamma$ e quindi m é finito ed é infatti un minimo.

Notiamo che i punti critici di g, soluzioni di

$$g_x := 12x^5 - 4x^3(1+4y) = 0, \qquad g_y := 8y - 4x^4 = 0$$

sono $(0,0)$, $(1, \frac{1}{2})$, $(-1, -\frac{1}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{8})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{8})$ e che, tra questi, i primi tre sono punti singolari di Γ e si ha

$$f(0,0) = 0, \qquad f(1, \frac{1}{2}) = f(-1, \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$

Cerchiamo il punto di minimo tra le soluzioni di $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = 0$. Vedremo tuttavia che che tale sistema non ha soluzione. Intanto, siccome

$$\nabla f(x,y) = (2x, 1)$$

non si annulla mai deve essere $\lambda \neq 0$, $\nabla g \neq 0$.

Ora, $(0,y)$ é soluzione di $f_x = \lambda g_x$, ma $g(0,y) = 0 \Rightarrow y = 0$, e $(0,0)$ non é soluzione di $\nabla f = \lambda \nabla g$ perché $\nabla g(0,0) = 0$.

Sia quindi $x \neq 0$ e quindi $6x^4 - 2x^2(1+4y) = \lambda = 8y - 4x^4$ e quindi $y = \frac{5x^4 - x^2}{4(1+x^2)}$ che, con $g = 0$, dá $12x^6 - 21x^4 + 6x^2 + 3 = 0$. Posto $x^2 = t$ si vede facilmente che l'equazione $12t^3 - 21x^4 + 6t^2 + 6t + 3 = 0$ ha un unico zero, positivo, in $t = 1$, da cui $|x| = 1$ e quindi $y = \frac{1}{2}$. Siccome $\nabla g(1, \frac{1}{2}) = \nabla g(-1, \frac{1}{2}) = 0$, concludiamo che **il sistema** $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = 0$ **non ha soluzioni**.

Il punto di minimo deve quindi essere un punto singolare di Γ. Confrontando i valori di f in tali punti, concludiamo che $m = f(0,0) = 0$.

Notiamo che a tale risultato si puó pervenire piú facilmente, riconoscendo che $4y^2 - x^4(1+4y) + 2x^6 = 4(y - \frac{x^2}{2})\,(y + \frac{x^2}{2} - x^4)$ e quindi

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 := \{y = \frac{x^2}{2}\}, \qquad \Gamma_2 := \{y = -\frac{x^2}{2} + x^4\}$$

e $f(x, \frac{x^2}{2}) = \frac{3}{2}x^2$, $f(x, -\frac{x^2}{2} + x^4) = \frac{x^2}{2} + x^4$ funzioni che hanno appunto un minimo in $x = 0$.

3 Sia $$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$$

É $\quad f_x = 4x(x^2+y^2) - 4x, \qquad f_y = 4y(x^2+y^2) + 4y$
$f_{xx} = 4(x^2+y^2) + 8x^2 - 4, \qquad f_{xy} = 8xy, \qquad f_{yy} = 4(x^2+y^2) + 8y^2 + 4$

Punti stazionari: $(0,0), \ (\pm 1, 0))$; $\det H(\pm 1,0) > 0$, $\det H(0,0) < 0$;
$(\pm 1, 0)$ sono **minimi globali**: $\|u\| \to +\infty \Rightarrow f(u) \to +\infty$; $(0,0)$ é una sella.

Valori critici: $-1 = f(\pm 1, 0)$ (minimo assoluto) $0 = f(0,0)$.

Curve di livello: $\Gamma_c := \{f = c\}$.

Se $c < -1$, $\Gamma_c = \emptyset$; se $c = -1$, $\Gamma_c = \{(-1,0),(1,0)\}$.

Se $-1 < c$, $c \neq 0$ Γ_c é una curva regolare, inoltre Γ_c é un insieme simmetrico rispetto agli assi e all'origine (segue dall'invarianza di f rispetto alle riflessioni $(x,y) \to (-x,y)$, $(x,y) \to (x-y), (x,y) \to (-x,-y))$.

Per tali valori di c, $\Gamma_c \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}$ é grafico della funzione (implicitamente definita dall'equazione $f = c$)

$$y(x) = \left[\sqrt{4x^2+1+c} - (x^2+1)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$1 - \sqrt{1+c} < x < 1 + \sqrt{1+c}$ se $c \leq 0$, $0 \leq x < 1 + \sqrt{1+c}$ se $c \geq 0$.

In particolare, se $c < 0$, Γ_c é una coppia di 'circoli' attorno a $(-1,0),(1,0)$ rispettivamente, mentre per $c > 0$, Γ_c é immagine della circonferenza unitaria $h^2 + k^2 = 1$, attraverso la 'parametrizzazione'

$$x = r(h,k)h, \quad y = r(h,k)k, \quad h^2+k^2 = 1, \quad r^2(h,k) = h^2 - k^2 + \sqrt{(h^2-k^2)^2 + c}$$

ottenuta chiedendo che $(r^2h^2 + r^2k^2)^2 - 2r^2(h^2+k^2) = c$ e risolvendo questa equazione, per h,k fissati, nell'incognita $r > 0$.

Notiamo anche qui il drastico cambio nella natura dei sottolivelli $\{f \leq c\}$ quando c attraversa il valore critico $c = 0$: da due 'dischi' disgiunti (insieme disconnesso) ad un solo 'disco'.

La curva $\Gamma_0 : \quad (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0$ (**Lemniscata di Bernoulli**)

É una curva regolare in ogni suo punto diverso da $(0,0)$, simmetrica rispetto agli assi e all'origine e compatta, e infatti

$$\Gamma_0 \cap \{x \geq 0, y \geq 0\} \subset \{(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$$

(disco di centro $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e raggio $\frac{\sqrt{2}}{2}$) giacché $(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + y^2 > \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 > \sqrt{2}x \Rightarrow f(x,y) > 2y^2 \geq 0$.

$\Gamma_0 \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}$ é il grafico di $y(x) = \sqrt{\sqrt{4x^2+1} - (x^2+1)}$, $0 \leq x \leq 2$ che ha derivata $y' = -\frac{f_x}{f_y}(x, y(x))$. Si vede facilmente che y' si annulla in $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ punto in cui $y(x)$ raggiunge il suo massimo.

Notiamo infine che $y(x) \to_{x\to 0} 0$ e quindi $y'(x) = -\frac{x^2+y^2(x)-1}{x^2+y^2(x)+1} \to_{x\to 0} 1$. Dunque, Γ_0 ha in $(0,0)$, due rette tangenti, di equazione complessiva $x^2 - y^2 = 0$.

4 Siano $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $\Gamma = \{(x,y) : \ g(x,y) = 0, \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$.
Sia $f(x,y) := (x-1)^2 + (y-1)^2$.

Calcolare $$m := \inf_\Gamma f, \quad M := \sup_\Gamma f.$$

Siccome $x^3 + y^3 = (x+y)\,(x^2 - xy + y^2)$, si ha che

$$y > 3-x \quad \Rightarrow \quad g(x,y) \geq (x+y)\frac{x^2+y^2}{2} - \frac{3}{2}(x^2+y^2) = \frac{x^2+y^2}{2}(x+y-3) > 0 \ \text{ e quindi}$$

$\Gamma \subset \{(x,y) : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ y \leq 1-x\}$ e quindi $M < +\infty$. Notiamo che $\nabla g = 0 \iff x^2 = y, \ y^2 = x$ e quindi $(0,0)$ é l'unico punto singolare di Γ.

Siccome $(1,1)$ é l'unico punto critico di f e $(1,1)$ non appartiene a Γ, il sistema di Lagrange associato al problema si puó scrivere

$$\nabla g(x,y) = \lambda \nabla f(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma \qquad \text{ovvero}$$

$$3x^2 - 3y = 2\lambda(x-1), \qquad 3y^2 - 3x = 2\lambda(y-1) \qquad x^3 + y^3 = 3xy, \qquad x \geq 0, \ y \geq 0$$

che comporta $\frac{x^2-y}{x-1} = \frac{y^2-x}{y-1}$ (perché $(1,1)$ non é soluzione).

Da tali equazioni deduciamo $xy(x-y) = x - y$.
Se $x = y$, da $g = 0$ otteniamo $x = y = \frac{3}{2}$.
Se $x \neq y$ allora $xy = 1$ e quindi $x^3 + \frac{1}{x^3} = 3$ che dá le soluzioni

$$\left((\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{\frac{1}{3}}, (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^{\frac{1}{3}} \right), \quad \left((\frac{3-\sqrt{5}}{2})^{\frac{1}{3}}, (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{\frac{1}{3}} \right)$$

In tali punti f prende il valore $c = [1 - (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^{\frac{1}{3}}]^2 + [1 - (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{\frac{1}{3}}]^2$.

Siccome $f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$, concludiamo che

$$m = \min\{\frac{1}{2}, c\}, \qquad M = 2 = f(0,0)$$

APPENDICE A1: Il Principio dei Moltiplicatori di Lagrange in $\mathbf{R}^n$

Siano $f, g \in C^1(O)$, O aperto in $\mathbf{R}^n$. Sia $u \in O$ tale che

$$\exists r > 0 : \quad \|v - u\| \le r, \quad g(v) = g(u) \quad \Rightarrow \quad f(v) \ge f(u)$$

Allora, $\qquad \nabla g(u) \ne 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda : \quad \nabla f(u) = \lambda \nabla g(u)$

Possiamo (ovvie sostituzioni) supporre che $\quad u = 0, \;\; g(0) = f(0) = 0, \;\; \|\nabla g(0)\| = 1.$

Cominciamo col provare che $\qquad \exists \delta > 0, \epsilon > 0 : \;\; < k, \nabla g(0) >= 0, \;\; \|k\| < \delta \quad \Rightarrow$

$$\exists ! t = t(k) \in [-\epsilon, \epsilon] \;\; \text{tale che} \;\; g(t(k)\nabla g(0) + k) = 0 \;\; \text{e} \;\; t(k) = \circ(\|k\|)$$

Intanto, da $\quad \|\nabla g(0)\| = 1 \quad$ e dalla continuitá di $\quad \nabla g(v)$, segue che $\exists \delta > 0 : \;\; < \nabla g(v), \nabla g(0) > \; \ge \; \frac{1}{2} \quad$ se $\quad \|v\| \le \delta \quad$ e quindi

$$\frac{d}{dt} g(t\nabla g(0) + k) =< \nabla g(t\nabla g(0) + k, \nabla g(0) > \; \ge \; \frac{1}{2} \;\; \text{se} \;\; t^2 + \|k\|^2 \le \delta^2$$

e quindi $\quad t \to g(t\nabla g(0) + k) \quad$ é strettamente crescente in $\quad t \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}\delta, \frac{\sqrt{2}}{2}\delta]$ se $\|k\| \le \frac{\sqrt{2}}{2}\delta$. $\quad$ In particolare $\quad \exists \epsilon > 0 : \quad g(-\epsilon \nabla g(0)) \; < \; 0 \; < \; g(\epsilon \nabla g(0))$ e quindi , per continuitá, prendendo eventualmente un δ piú piccolo,

$$g(-\epsilon \nabla g(0) + k) < 0 < g(\epsilon \nabla g(0) + k) \;\; \text{se} \;\; \|k\| \le \delta$$

che, insieme alla stretta monotonia, comporta che $\quad t \to g(t\nabla g(0) + k) \quad$ ha, se $\|k\| \le \frac{\sqrt{2}}{2}\delta \quad$ esattamente uno zero in $\quad [\epsilon, \epsilon]$, che chiameremo $t(k)$. $\quad$ Poi, $< \nabla g(0), k >= 0, \;\; \|k\| < \delta \quad \Rightarrow \quad 0 = g(t(k)\nabla g(0) + k) =< \nabla g(0), t(k)\nabla g(0) + k > + \circ \left(|t(k) + \|k\|\right) = t(k) + \circ(|t(k) + \|k\|) \quad$ cioé, fissato $\rho > 0, \;\; \exists \sigma_\rho : \quad \|k\| < \sigma_\rho \quad \Rightarrow$ $|t(k)| \le \rho(|t(k) + \|k\|) \quad \Rightarrow \qquad |t(k)| \le 2\rho\|k\|.$

Infine, dall'ipotesi su f segue che, $\qquad < \nabla g(0), k >= 0, \;\; \|k\| = 1, \;\; 0 < \tau \le \frac{\delta}{2} \quad \Rightarrow$

$$0 \le \frac{f(t(\tau k)\nabla g(0) + \tau k)}{\tau} =< \nabla f(0), \frac{t(\tau k)}{\tau}\nabla g(0) + k > + \circ (1) \to_{\tau \to 0} < \nabla f(0), k >$$

e quindi $\quad < \nabla g(0), k >= 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \le < \nabla f(0), \pm k > \;\; \Rightarrow \;\; < \nabla f(0), k >= 0 \quad \Rightarrow$

$$\nabla f(0) \; = < \nabla f(0), \nabla g(0) > \quad \nabla g(0)$$

Infatti, se $\;\|h\| = 1\;$ e $\;u\;$ é un vettore tale che $\;< h, k >= 0 \;\; \Rightarrow \;\; < u, k >= 0$, allora $\qquad < h, u - < u, h > h > = \; 0 \qquad \Rightarrow \;\; < u, u - < u, h > h > = \; 0 \qquad \Rightarrow$ $< u - < u, h > h, u - < u, h > h >= 0 \quad \Rightarrow \quad u - < u, h > h = 0.$

APPENDICE A2: Forme quadratiche

La natura di un punto stazionario $u = (x_1, \ldots, x_n)$ di f dipende dalle proprietá di segno della forma quadratica associata alla matrice Hessiana

$$< H_f(u)\, h,\ h > \ = \ \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u)\, h_i\, h_j \ = \qquad\qquad h = (h_1, \ldots, h_n)$$

Ora, $H_f(u)$ simmetrica $\Rightarrow$ $H_f(u)$ ha autovalori reali, diciamo $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Le proprietá di segno della forma quadratica associata sono legate al segno degli autovalori. Diamo qui una dimostrazione analitica di questo fatto.

Sia $\mathcal{A}=(a_{ij})_{ij=1,\ldots,n}=\mathcal{A}^{\,t}$ matrice $n\times n$ simmetrica. La forma quadratica associata

$$< \mathcal{A}\ h,\ h > := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, h_i\, h_j, \qquad h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbf{R}^n$$ si dice

definita positiva (negativa) se $< \mathcal{A}\ h,\ h > > 0\ (< 0),\ \ \forall\, h \neq (0,0)$

semidefinita positiva (negativa) se $< \mathcal{A}\ h,\ h > \geq \ 0\ (\leq 0),\ \ \forall\, h \in \mathbf{R}^n$

Proposizione Sia $\mathcal{A} = (a_{ij})$ matrice simmetrica $n \times n$, $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ i suoi autovalori. Allora

$$\lambda_1 = \inf_{\|h\|=1} < \mathcal{A}\ h, h > \qquad\qquad \lambda_n = \sup_{\|h\|=1} < \mathcal{A}\ h, h >$$

Prova. Sia $m := \ < \mathcal{A}\ \overline{h}, \overline{h} > \ = \min_{\|h\|=1} < \mathcal{A}\ h, h >$. Siccome

$$\nabla < \mathcal{A}\ h, h >= 2\ \mathcal{A}\ h \qquad \text{e} \qquad \nabla \|h\|^2 = 2h$$

per il Principio dei moltiplicatori di Lagrange esiste λ tale che $\mathcal{A}\ \overline{h} = \lambda \overline{h}$ con, $m =< \mathcal{A}\ \overline{h}, \overline{h} >= \lambda \|h\|^2 = \lambda$.

Dunque $\mathcal{A}\ \underline{h} = m\, \underline{h}$, cioé m é un autovalore di $\mathcal{A}$, necessariamente il piú piccolo, giacché $\mathcal{A}\ h = \lambda h,\ ||h|| = 1 \ \Rightarrow\ \lambda \ = < \mathcal{A}\ h, h > \geq \ m$.

Corollario

(ii) $\mathcal{A}$ é definita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 > 0\ \ (\lambda_n < 0)$

(iii) $\mathcal{A}$ é semidefinita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 = 0\ \ (\lambda_n = 0)$