AM2: Tracce delle lezioni- VII Settimana

CONTINUITÁ : ESEMPI E COMPLEMENTI

1. Esercizio Dati $\alpha,\ \beta > 0,$ sia

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta}{x^2+y^2} \quad \text{se} \quad x^2+y^2 \neq 0, \quad f(0,0) = 0$$

Provare che f é continua in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + \beta > 2$

Deriviamo dapprima la diseguaglianza:

$$(*) \qquad \alpha,\ \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 2 \quad \Rightarrow \quad |x|^\alpha\,|y|^\beta \leq \frac{1}{2}\max\{\alpha,\beta\}\,(x^2+y^2)$$

ponendo $p = \frac{2}{\alpha}$, $q = \frac{2}{\beta}$, $a = |x|^\alpha$, $b = |y|^\beta$ nella (ben nota?) diseguaglianza di Holder

$$(**) \qquad p,q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \Rightarrow \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \forall a,b \geq 0$$

Se $\alpha+\beta-2 \leq 0$, $f(tx,ty) = t^{\alpha+\beta-2}f(x,y)$ non va a zero al tendere di t a zero (se $x^2+y^2 \neq 0$) e quindi f non é continua in $(0,0)$.

Sia dunque $\alpha + \beta - 2 > 0$.

Se $\alpha \geq 2$ é $f(x,y) \leq |x|^{\alpha-2}\,|y|^\beta \to_{x^2+y^2\to 0} 0$. Analogamente se $\beta \geq 2$.

Resta da considerare il caso $\alpha,\ \beta < 2$. In tal caso, se $\delta := \frac{\alpha+\beta}{2} - 1$, da $\alpha+\beta > 2$ segue $\delta > 0$ mentre $\alpha < 2 \Rightarrow \delta < \beta$ e, analogamente $\delta < \alpha$. Dunque, siccome $\alpha+\beta-2\delta = 2$, dalla diseguaglianza $(*)$ segue

$$f(x,y) = \frac{|x|^{\alpha-\delta}\,|y|^{\beta-\delta}}{x^2+y^2}\,(|x|^\delta\,|y|^\delta) \leq (|x|^\delta\,|y|^\delta) \leq \left[\frac{x^2+y^2}{2}\right]^\delta \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

2. Prova della diseguaglianza di Holder $(**)$

Per ogni $y \geq 0$ la funzione $x \to xy - \frac{x^p}{p}$, $x \geq 0$ é superiormente limitata e raggiunge il suo massimo in $x(y)$ tale che $y - x^{p-1} = 0$ ovvero $x(y) = y^{\frac{1}{p-1}}$ e tale massimo vale $y\,y^{\frac{1}{p-1}} - \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} = \frac{1}{q}\,y^{\frac{p}{p-1}} = \frac{y^{\frac{1}{q}}}{q}$. Dunque

$$xy - \frac{x^p}{p} \leq \frac{y^{\frac{1}{q}}}{q} \qquad \forall x,y \geq 0$$

3. Esercizio Dati $\alpha,\ \beta > 0$, sia

$$g(x,y) = \frac{|x|^\alpha\,|y|^\beta}{x^4+y^2} \quad \text{se} \quad x^2+y^2 \neq 0, \quad g(0,0) = 0$$

Provare che g é continua in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha + 2\beta > 4$

Se $\alpha+2\beta \leq 4$, $g(tx,t^2y) = t^{\alpha+2\beta-4}g(x,y)$ non va a zero al tendere di t a zero (se $x^2+y^2\neq 0$) e quindi g non é continua in $(0,0)$.

Sia dunque $\alpha + 2\beta > 4$.

Se $f(x,y) := \frac{|x|^{\frac{\alpha}{2}}\,|y|^\beta}{x^2+y^2}$ é $g(x,y) = f(x^2,y) \to_{x^2+y^2\to 0} 0$ perché $\frac{\alpha}{2} + \beta > 2$ (vedi l'esercizio 1) e quindi g é continua.

4. Esercizio Sia $0 \leq \varphi \in C_0^\infty((-1,1))$, $\varphi(0) = 1$ e $f(x,y) = \varphi(\frac{2xy}{x^2+y^2-2x})$ se $x^2+y^2-2x\neq 0$. Si ha:

(i) $\lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)\ \forall\ u_0 := (x_0,y_0)$ con $x_0^2+y_0^2-2x_0 \neq 0$

(ii) $\lim_{u\to u_0} f(u) = 0\ \forall\ u_0 := (x_0,y_0)$ con $x_0^2+y_0^2-2x_0 = 0, u_0\neq 0,\ u_0\neq(2,0)$

(iii) $\lim_{u\to u_0} f(u)$ non esiste, se u_0 é $(0,0)$ oppure $u_0 = (2,0)$.

(i): $(x_n,y_n)\to_n (x_0,y_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{2x_ny_n}{x_n^2+y_n^2-2x_n} \to_n \frac{2x_0y_0}{x_0^2+y_0^2-2x_0}$.

(ii): $|x^2+y^2-2x| \leq |x_0y_0|$ e $|2xy|\geq|x_0y_0|$ se $|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2| << 1$ e quindi $|\frac{2xy}{x^2+y^2-2x}|\geq 1$ e quindi $f(x,y)\equiv 0$ in un piccolo disco attorno a u_0.

(iii) $f(x,0) = \varphi(0) = 1$ se $x\neq 0, x\neq 2$. Ma, siccome $x^2+y^2 = r^2$, interseca, se $r<2$, $\{(x,y) : x^2+y^2-2x = 0\}$ (circonferenza di raggio 1 centrata in $(1,0)$) f vale 0 nei punti di $x^2+y^2 = r^2$, vicini a tale intersezione: f prende i valori 1 e 0 in punti arbitrariamente vicini a $(0,0)$ e quindi non ha limite in $(0,0)$. Analogamente in $(2,0)$.

5. Esercizio Sia $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\sup_{x\in\mathbf{R}}|\varphi| > 0$, $f(x,y) := \varphi(\frac{|\arctan\frac{y}{x}|}{\sqrt{x^2+y^2}})$ se $x\neq 0$, $f(0,y) = \varphi(\frac{\pi}{2y})$ se $y\neq 0$, $f(0,0) = 0$. Si ha:

$\lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$ se $u_0\neq 0$ mentre $\lim_{u\to 0} f(u)$ non esiste. Infatti $f(x,mx) = \varphi(\frac{|\arctan m|}{|x|\sqrt{1+m^2}}) \to 0$ al tendere di x a zero, mentre, per r piccolo

$x = r\cos t, y = r\sin t,\quad t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \quad \Rightarrow \quad \sup_{x^2+y^2=r^2}|f(x,y)| = \sup_{t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\varphi(\frac{t}{r}) = \sup_{\mathbf{R}}|\varphi| > 0$.

6. Separata continuitá. Sia $A \subset \mathbf{R}^2$, $f \in C(A)$. Siano

$A_x := \{y : (x,y) \in A\} \subset \mathbf{R}$, $A^y := \{x : (x,y) \in A\}$. Allora

$f_x : A_x \to \mathbf{R}$, $f_x(y) := f(x,y)$, $f^y : A^y \to \mathbf{R}$, $f^y(x) := f(x,y)$

sono continue per ogni y (rispettivamente, per ogni x). Una funzione f avente tale proprietá si dice **separatamente continua** in x ed y.

É in generale falso che una funzione, continua separatamente in x, y, risulti continua 'nel complesso delle variabili'. Ad esempio, se $\varphi \in C_0(\mathbf{R})$, $\varphi(1) = 1$ e $f(x,y) = \varphi(\frac{x^2}{y})\frac{1}{y}$ se $y \neq 0$, $f(x,0) = 0 \ \forall x$, f é continua in ogni punto diverso da $(0,0)$ e separatamente continua in x e y anche in $(0,0)$, ma non é continua in $(0,0)$: $f(x,x^2) = \frac{\varphi(1)}{x^2} \to_{x\to 0} +\infty$. In particolare, $\sup\limits_{x^2+y^2\le r} f = +\infty$ cosa che non puó accadere se f é continua (od anche solo se ha un limite finito) in zero.

7. O_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ aperti $\Rightarrow$ $\bigcup_\alpha O_\alpha$ é aperto,
F_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ chiusi $\Rightarrow$ $\bigcap_\alpha F_\alpha$ é chiuso. Infatti

$$u \in \bigcup_\alpha O_\alpha \ \Rightarrow \ \exists \alpha : u \in O_\alpha \ \Rightarrow \ \exists \ D_r(u) \subset O_\alpha \subset \bigcup_\alpha O_\alpha, \qquad (\bigcap_\alpha F_\alpha)' = \bigcup_\alpha F'_\alpha$$

8. $\overline{A} := \bigcap_{F:\ A\subset F,\, F \text{ chiuso}} F$, il piú piccolo chiuso contenente A, si chiama **chiusura** di A. Chiaramente, F é chiuso $\Leftrightarrow F = \overline{F}$.

9. $u \in \overline{A} \ \Leftrightarrow \ \exists u_n \in A : u_n \to u$. Infatti, $u \in \overline{A} \ \Rightarrow \ D_r(u) \cap A \neq \emptyset$ $\forall r > 0$, altrimenti $\exists r > 0 :$ $A \subset D'_r$ e quindi $u \in \overline{A} \subset D'_r$, contraddizione. Da $D_{\frac{1}{n}}(u) \cap A \neq \emptyset \ \forall n$, segue che esiste $u_n \in A :$ $u_n \to u$. Il viceversa é ovvio.

10. $int\, A := \{u \in A : \ \exists D_r(u) \subset A\}$, $\partial A := \overline{A} \setminus int\, A$. Provare che

$$\partial A = \{u : \ D_r(u) \cap A \neq \emptyset \neq D_r(u) \cap A' \ \forall r > 0\}$$

Sia $u \in \partial A$. $\forall r > 0, D_r \cap A' \neq \emptyset$ perché u non é interno e $D_r \cap A \neq \emptyset$ perché $u \in \overline{A}$. Viceversa, $D_r \cap A' \neq \emptyset \forall r > 0 \Rightarrow u$ non é interno e $D_r \cap A \neq \emptyset \forall r > 0 \Rightarrow u \in \overline{A}$.

11. Siano O aperto, $x, y \in C([0,1])$ tali che $(x(0),y(0)) \in O$, $(x(1),y(1)) \in \overline{O}'$.

Provare che $\exists t \in [0,1] : \ (x(t),y(t)) \in \partial O$.

$f(x,y) \equiv 1$ in O, $f(x,y) \equiv 0$ in O' é continua in $O \cup \overline{O}'$ e quindi, se fosse $\gamma(t) := (x(t),y(t)) \in O \cup \overline{O}' \ \forall t \in [0,1]$, sarebbe $[0,1] \subset (f \circ \gamma)([0,1])$.

TEOREMA DI WEIERSTRASS Sia $f \in C(K)$, $K \subset \mathbf{R}^n$ compatto.

Allora, $\exists \quad \underline{u}, \quad \overline{u} \in K: \; -\infty < \inf_K f = f(\underline{u}), \quad f(\overline{u}) = \sup_K f < +\infty$

Prova. Sia $u_n \in K : f(u_n) \to_n \sup_K f$. Possiamo supporre, passando eventualmente ad una sottosuccessione, che $u_n \to u$ per un $u \in K$. Da $f(u_n) \to f(u)$ segue che $\sup_K f = f(u) < +\infty$.

Variante di Weierstrass Sia $F \subset \mathbf{R}^n$ chiuso. Sia $f \in C(F)$ tale che
(i) **(coecivitá)** $u_n \in C, \|u_n\| \to_n +\infty \;\Rightarrow\; f(u_n) \to_n +\infty$
(ii) **(semicontinuitá inferiore)** $u_n \in C, u_n \to u \;\Rightarrow\; \liminf_n f(u_n) \geq f(u)$.

Allora $\exists \quad \underline{u} \in C : \quad f(\underline{u}) = \inf_C f$.

Infatti, se $u_n \in C, f(u_n) \to_n \inf_C f$, allora u_n é limitata in virtú della coercivitá, e quindi si puó supporre, passando eventualmente ad una sottosuccessione, che u_n converga a qualche $u \in C$ (perché C é chiuso). Da (ii) segue $\inf_C f = \lim_n f(u_n) \geq f(u)$.

UNIFORME CONTINUITÁ f é **uniformemente continua** in A sse

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad (u, v \in K, \quad ||u - v|| \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(u) - f(v)| \leq \epsilon)$$

(**TEOREMA DI HEINE-CANTOR**) $f \in C(K)$, $K \subset \mathbf{R}^n$ compatto $\Rightarrow$ f é uniformemente continua in K.

Prova. Se no, $\exists\, \epsilon_0 > 0$, $u_n, v_n \in K$, $||u_n - v_n|| \leq \frac{1}{n}$: $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \epsilon_0$. Passando eventualmente a sottosuccessioni, possiamo supporre che $u_n \to u$, $v_n \to v$ per certi $u, v \in K$. Per continuitá: $|f(u) - f(v)| \geq \epsilon_0$. Ma $||u - v|| \leq ||u - u_n|| + ||u_n - v_n|| + ||v_n - v|| \quad \forall n \;\Rightarrow\; u = v$, contraddizione.

CONNESSIONE $A \subset \mathbf{R}^2$ é **connesso per archi** se $\forall\, u, v \in A$, esiste un **cammino continuo** $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $x, y \in C([0, 1])$:

$$\gamma(t) \in A \;\; \forall t \in [0, 1], \;\; \gamma(0) = (x(0), y(0)) = u, \;\; \gamma(1) = (x(1), y(1)) = v$$

Teorema del valore intermedio. Sia $A \subset \mathbf{R}^2$ connesso per archi. Allora

$$f \in C(A) \quad \Rightarrow \quad f(A) \text{ é un intervallo.}$$

Prova. Sia $a = f(u)$, $b = f(v)$, $u, v \in A$. Siano $x, y \in C([0, 1])$: $\gamma(t) := (x(t), y(t)) \in A \quad \forall t \in [0, 1]$, $\gamma(0) = u$, $\gamma(1) = v$. Siccome $t \to f(\gamma(t))$ é continua in $[0, 1]$ si ha $[a, b] \subset f \circ \gamma([0, 1])$ (teorema del valore intermedio per funzioni di una variabile!).