

AM2: Tracce delle lezioni- VI Settimana

FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI

Sia $n \in \mathbf{N}$. Una funzione reale di n variabili reali é una funzione definita in un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}$ n volte (insieme delle n -uple ordinate di numeri reali, o vettori $v = (x_1, \dots, x_n)$) e a valori in \mathbf{R} .

Ad esempio, $f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ (funzione lineare).

STRUTTURA ALGEBRICA in \mathbf{R}^n : Sia $u = (x_1, \dots, x_n)$.

(addizione) Se $v = (y_1, \dots, y_n)$ $u + v := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

(moltiplicazione per uno scalare) Se $t \in \mathbf{R}$ $tu := (tx_1, \dots, tx_n)$

Interpretazione geometrica. Come noto, \mathbf{R}^2 si rappresenta mediante i punti di un piano cartesiano Oxy .

In tale piano, dato v , l'insieme $\mathbf{R}v := \{tv : t \in \mathbf{R}\}$ é l'insieme dei punti della retta uscente dall'origine $O := (0, 0)$ e passante per v ; $\{tv + u : t \in \mathbf{R}\}$ é la (rappresentazione parametrica della) retta passante per u e parallela alla retta $\mathbf{R}v$.

In particolare, $u + v$ é il punto comune alle rette $\{tu + v : t \in \mathbf{R}\}$ e $\{u + tv : t \in \mathbf{R}\}$ e si chiama traslazione di u lungo v . Tale interpretazione geometrica si estende al caso generale $n > 2$.

PRODOTTO SCALARE Siano $u = (x_1, \dots, x_n)$, $v = (y_1, \dots, y_n)$.

$\langle u, v \rangle := x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ é il prodotto scalare tra u e v . Proprietá

positivitá $0 \leq \langle u, u \rangle \quad \forall u \in \mathbf{R}^n$

simmetria $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^n$

bilinearitá $\langle au + bv, h \rangle = a \langle u, h \rangle + b \langle v, h \rangle \quad \forall a, b \in \mathbf{R}$

STRUTTURA METRICA in \mathbf{R}^n : Sia $u = (x_1, \dots, x_n)$.

$$\|u\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad (\text{norma di } u)$$

Se $u, v \in \mathbf{R}^n$ é $d(u, v) := \|u - v\|$ (**distanza** tra u, v .)

Interpretazione geometrica. In \mathbf{R}^2 , $\|u\| := \sqrt{x^2 + y^2}$ é la lunghezza del segmento (o lunghezza del vettore u) che unisce il punto $u = (x, y)$ all'origine, e $d(u, v)$ é la distanza tra i punti u e v . Analoga interpretazione geometrica in \mathbf{R}^n .

CAUCHY-SCHWARTZ $| \langle u, v \rangle | \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^n$.
Infatti

$$0 \leq \langle u+tv, u+tv \rangle = \|u\|^2 + 2t \langle u, v \rangle + t^2 \|v\|^2 \quad \forall t \Rightarrow \langle u, v \rangle^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0$$

Proprietá della norma

(i) $\|tu\| = |t| \|u\| \quad \forall u \in \mathbf{R}^2, t \in \mathbf{R}$ (omogeneitá)

(ii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^2$ (diseguaglianza triangolare)

La (i) é ovvia, mentre (ii) segue dalla diseguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \langle u, v \rangle \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$$

Proprietá della distanza

- (i) $0 \leq d(u, v), \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^n \quad d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ (positivitá)
- (ii) $d(u, v) = d(v, u) \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^n$ (simmetria)
- (iii) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \quad \forall u, v, w \in \mathbf{R}^n$ (diseguaglianza triangolare)

NOTAZIONE. $D := \{u : \|u\| < 1\}$, e, se $r > 0, v \in \mathbf{R}^n$:

$$D_r := rD := \{ru : u \in D\} = \{u : \|u\| < r\}, \quad D_r(v) := D_r + v := \{u+v : u \in D_r\}$$

D_r é disco di raggio r centrato in zero, $D_r(v)$ é disco di raggio r centrato in v .

SUCCESSIONI CONVERGENTI in \mathbf{R}^n $u_k \rightarrow_k u \Leftrightarrow \|u_k - u\| \rightarrow_k 0$

NOTA. (i) Se $u_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n}), \quad u = (x_1, \dots, x_n)$, allora

$$u_k \rightarrow u \Leftrightarrow x_{k,1} \rightarrow_k x_1, \dots, \quad x_{k,n} \rightarrow_k x_n.$$

Infatti $\|u_k - u\|^2 = \sum_{j=1}^n |x_{k,j} - x_j|^2$

(ii) u_k converge $\Rightarrow \sup_k \|u_k\| < +\infty$

DEFINIZIONE (insiemi limitati, aperti, chiusi, compatti)

- (i) $B \subset \mathbf{R}^n$ é **limitato** se esiste $r > 0$: $B \subset D_r$
- (ii) $O \subset \mathbf{R}^n$ é **aperto** se $\forall u \in O \exists r > 0$: $D_r(u) \subset O$
- (ii) $F \subset \mathbf{R}^n$ é **chiuso** se F' é aperto
- (iii) $K \subset \mathbf{R}^n$ é **compatto** se é chiuso e limitato

PROPOSIZIONE 1

- (i) $F \subset \mathbf{R}^n$ é **chiuso** $\Leftrightarrow (u_k \in F, u_k \rightarrow_k u \Rightarrow u \in F)$
- (ii) $K \subset \mathbf{R}^n$ é **compatto** $\Leftrightarrow (u_k \in K \Rightarrow \exists u_{k_j}, u \in K : u_{k_j} \rightarrow u)$.

Prova. (i) \Rightarrow : $u \notin F \Rightarrow \exists r > 0$: $D_r(u) \subset F'$ mentre $u_k \in F \cap D_r(u)$ definitivamente. \Leftarrow : Se $u \notin F$, deve esistere $r > 0$: $D_r(u) \subset F'$, altrimenti $\forall k, \exists u_k \in D_{\frac{1}{k}}(u) \cap F$. Ma $u_k \in F \cap D_{\frac{1}{k}}(u) \Rightarrow u_k \rightarrow_k u \Rightarrow u \in F$.

(ii) \Rightarrow : $u_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n}) \in K \Rightarrow \sup_k |x_{k,j}| < +\infty \forall j = 1, \dots, n \Rightarrow \exists k_i, \exists x_1, \dots, x_n : x_{k_i,j} \rightarrow_i x_j$ per $j = 1, \dots, n \Rightarrow u_{k_i} \rightarrow_i u = (x_1, \dots, x_n) \in K$ perché K é chiuso.

\Leftarrow : Se K é non limitato, esiste $u_k \in K$ con $\|u_k\| \rightarrow +\infty$. Per ogni estratta u_{k_i} é ugualmente vero che $\|u_{k_i}\| \rightarrow_i +\infty$ e quindi u_{k_i} non può convergere (sarebbe limitata!). Se K non é chiuso, esiste $u \notin K$ e $u_k \in K$ con $u_k \rightarrow u$ e quindi u_k non ha sottosuccessioni convergenti in K .

DEFINIZIONE (di limite) Sia $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$. Sia $\dot{D}_r(u) = D_r(u) \setminus \{u\}$. Sia u_0 tale che $\dot{D}_r(u_0) \cap A$ é non vuoto $\forall r > 0$. Allora

$$\lim_{u \rightarrow u_0} f = l \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : u \in A \cap \dot{D}_{\delta_\epsilon}(u_0) \Rightarrow |f(u) - l| \leq \epsilon)$$

$$\lim_{u \rightarrow u_0} f = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : u \in A \cap \dot{D}_{\delta_\epsilon}(u_0) \Rightarrow f(u) \geq M)$$

Se $D'_r \cap A$ é non vuoto per ogni $r > 0$, allora

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} f = l \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists R_\epsilon > 0 : u \in A, \|u\| \geq R_\epsilon \Rightarrow |f(u) - l| \leq \epsilon)$$

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} f = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0, \exists R_M > 0 : u \in A, \|u\| \geq R_M \Rightarrow f(u) \geq M)$$

NOTA. Come per le funzioni di una variabile si vede facilmente che

- (i) f ha limite l per u tendente a u_0 ($|u|$ tendente a $+\infty$) \Leftrightarrow
 $(u_n \in A, u_n \neq u_0, u_n \rightarrow u_0 \text{ (} |u_n| \rightarrow +\infty \text{)} \Rightarrow f(u_n) \rightarrow l)$
- (ii) **(Cauchy)** f ha limite l per u tendente a u_0 \Leftrightarrow
 $(\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : u, v \in A \cap \dot{D}_{\delta_\epsilon}(u_0) \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \epsilon)$
 f ha limite l per $|u|$ tendente a $+\infty$ \Leftrightarrow
 $(\forall \epsilon > 0, \exists R_\epsilon > 0 : u, v \in A, |u|, |v| \geq R_\epsilon \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \epsilon)$

DUE ESEMPI . (i) Sia $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \neq 0$.

Dalla NOTA-(i) si vede subito che $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0) \forall u_0 \neq 0$. Invece,

$\lim_{u \rightarrow 0} f(u)$ e $\lim_{|u| \rightarrow +\infty} f(u)$ non esistono: $f(tx, ty) \equiv \frac{xy}{x^2+y^2}$

(ii) Sia $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \neq 0$. Come sopra, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0) \forall u_0 \neq 0$. Ed é anche $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 0$: $|\frac{x^2y}{x^2+y^2}| \leq \frac{|x|}{2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$;

Poi, $\lim_{|u| \rightarrow +\infty} f(u)$ non esiste: $f(x, x) = \frac{x}{2} \rightarrow_{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$.

DEFINIZIONE (continuitá) Sia $f : A \rightarrow \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$, $u_0 \in A$.

f é continua in u_0 se $\lim_{u \rightarrow u_0} f$ esiste e $\lim_{u \rightarrow u_0} f = f(u_0)$.

f é continua in A se é continua in ogni punto di A . $C(A)$ indicherá la classe delle funzioni continue in A .

Proposizione 1 Sia $f : A \rightarrow \mathbf{R}, u \in A$. Allora

f é continua in $u \Leftrightarrow (u_n \in A, u_n \rightarrow_n u \Rightarrow f(u_n) \rightarrow f(u))$

Proposizione 2 Siano $f, g : A \rightarrow \mathbf{R}, u \in A$. Allora

- (i) f, g continue in $u \Rightarrow \alpha f + \beta g$ é continua in $u \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$
(ii) f, g continue in $u \Rightarrow fg$ é continua in u e $\frac{f}{g}$ é continua in u se $g(u) \neq 0$
(iii) se $f(A) \subset B$ e $\phi : B \rightarrow \mathbf{R}$ é continua in $f(u)$, allora $\phi \circ f$ é continua in u .

Ad esempio, i polinomi in x_1, \dots, x_n sono continui in \mathbf{R}^n , $\exp(x^2 + y^2)$ é continua in \mathbf{R}^2 , etc.