AM2: Tracce delle lezioni-IV settimana

SVILUPPI IN SERIE DI TAYLOR

FORMULA DI TAYLOR Sia $f \in C^\infty((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$. Allora

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n +$$

$$+\frac{1}{n!}(x - x_0)^{n+1} \int_0^1 (1 - t)^n f^{(n+1)}(tx + (1 - t)x_0)dt$$

Infatti, sia $|x - x_0| < \delta$ e $\varphi(t) := f(tx + (1 - t)x_0),\ t \in [0, 1]$. É

$$\varphi(1) = f(x), \quad \varphi(0) = f(x_0), \quad \varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(tx + (1 - t)x_0)(x - x_0)^k.$$

La formula di Taylor per φ

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1 - t)^n \varphi^{(n+1)}(t)dt$$

dá la formula voluta per f.

NOTA.

(i) $R_n(x, x_0) := \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx+(1-t)x_0)dt$, resto nella formula di Taylor per f, di ordine n e di punto iniziale x_0 , é infinitesimo di ordine $n + 1$.

Effettuando il cambio di variabile $t = \frac{\tau - x_0}{x - x_0}$ si ha anche

$$R_n(x, x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(\tau)(x - \tau)^n d\tau$$

(ii) $R_n(x, x_0) := \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{t}x + (1 - \bar{t})x_0)$ per un $\bar{t} \in [0, 1]$.

É questa la rappresentazione del resto nella forma di Lagrange, e segue dalla rappresentazione del resto in forma integrale e dal teorema della media.

SERIE DI TAYLOR Sia $f \in C^\infty((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

si chiama serie di Taylor di f di punto iniziale x_0

SVILUPPABILITÁ IN SERIE DI TAYLOR f si dice **sviluppabile in serie di Taylor** attorno ad x_0 se

$$\exists r > 0 : \quad f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

UN ESEMPIO: $f(x) \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $|x| < r = \limsup_n |a_n|^{-\frac{1}{n}}$. Infatti $f \in C^\infty((-r,r))$ e $f^{(n)}(0) \;=\; n! a_n$ ovvero $f(x) \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, $|x| < r$.

Si hanno ad esempio i seguenti sviluppi in serie di Taylor (validi per $|x| < 1$):

$$\frac{1}{1-x} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \frac{1}{1+x} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad \frac{1}{1+x^2} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \;=\; \frac{d^k}{dx^k}\frac{1}{1-x} \;=\; \frac{d^k}{dx^k}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} x^n$$

$$\log(1+x) \;=\; \int_0^x \frac{dt}{1+t} \;=\; \int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n]\, dt \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

$$\arctan x \;=\; \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \;=\; \int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}]\, dt \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

Proposizione $f \in C^\infty((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$ é sviluppabile in serie di Taylor attorno ad x_0 sse $\exists r > 0 : \;\; R_n(x,x_0) \to_{n\to+\infty} 0 \;\; \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$.

Infatti $f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \;=\; R_N(x,x_0)$.

In particolare, se per ogni $r > 0$ risulta $\max_{|x|\le r} |f^{(n)}(x)| \;\le\; M_r \quad \forall n$, allora $|x| \;\le r \;\; \Rightarrow \;\; |R_n(x)| \;\le\; \frac{r^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \sup_{|x|\le r} |f^{(n+1)}(x)|\, dt \;\le\; \frac{M_r\, r^{n+1}}{n+1!} \to_n 0 \;\; \Rightarrow$

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

Si ottengono subito, ad esempio, i seguenti sviluppi in serie

$$e^x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sin x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} \qquad \cos x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \quad \forall x$$

$$\sinh x \ = \ \frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \ - \ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}] \ = \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1!} \qquad \cosh x \ = \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n!}$$

SERIE BINOMIALE $\qquad (1+x)^\alpha \ = \ 1 \ + \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \qquad \forall x\in(-1,1)$

Infatti, $\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^\alpha \ = \ \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ e, se $a_n := \frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)|}{n!}$, é $\frac{a_n}{a_{n+1}}\to 1$. Poi, $1-t \ \le \ 1+tx \quad \forall x\in(-1,1),\ t\in[0,1]$

$$\Rightarrow \quad |R_n(x)| \ \le \ \frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1}\int_0^1[\frac{1-t}{1+tx}]^n(1+tx)^{\alpha-1}dt$$

$$\le \ \frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1}\int_0^1(1+tx)^{\alpha-1}dt \ \to 0 \quad \forall x\in(-1,1)$$

Ad esempio, per $x\in(-1,1)$, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \ = \ 1 \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{2n-1!!}{n!}x^n \ = \ 1 \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n-1!!}{2n!!}x^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ = \ 1 \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1!!}{2n!!}x^{2n} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ = \ 1 \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n-1!!}{2n!!}x^{2n}$$

$$\sin^{-1}x \ = \ \int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \ = \ x \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1!!}{2n!!(2n+1)}x^{2n+1}$$

$$\sinh^{-1}x \ = \ \int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \ = \ x \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n-1!!}{2n!!(2n+1)}x^{2n+1}$$

Comportamento agli estremi. Siccome $\frac{2n-1!!}{2n!!} : \frac{2n+1!!}{2n+2!!} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$, la serie di Taylor di $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ converge, per il criterio di Leibnitz, anche in $x=1$ e la convergenza é uniforme in tutto $[0,1]$. In particolare, $\quad 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{2n-1!!}{n!} \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Poi, siccome $\frac{2n-1!!}{2n!!} \ = \ O(\frac{1}{\sqrt{n}})$, le serie di Taylor di $\sin^{-1}x$ e di $\sinh^{-1}x$ convergono assolutamente in 1 e -1 e la convergenza é uniforme in tutto $[-1,1]$. In particolare,

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1!!}{2n!!(2n+1)} = \sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2}, \qquad 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n-1!!}{2n!!(2n+1)} = \sinh^{-1}1 = \log(1+\sqrt{2})$$

FUNZIONI ANALITICHE

Una funzione f si dice analitica in un intervallo aperto I se é 'localmente' somma di una serie di potenze:

$\forall x_0 \in I,\ \exists\ a_n, r > 0$ (dipendenti da x_0) tali che $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ in $(x_0 - r, x_0 + r)$.

NOTA. Una funzione analitica in I, essendo localmente somma di serie di potenze, é $C^\infty(I)$ e $f^{(n)}(x_0) = n! a_n$ ovvero $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ é la serie di Taylor di f attorno a x_0. Tuttavia non tutte le funzioni $C^\infty(I)$ sono analitiche in I:

$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$ é C^∞, con derivate di ogni ordine uguali a zero in $x = 0$: dunque f non é somma della sua serie di Taylor.

Proposizione Sia $f \in C^\infty((a,b))$. Se

$$\exists\ M,\ r > 0: \quad \sup_{(a,b)} |f^{(n)}(x)| \leq \frac{Mn!}{r^n} \quad \forall\ n \in \mathbf{N}$$

allora f é analitica in (a,b). Piú precisamente, $\forall\ x_0 \in (a,b)$, si ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap (a,b)$$

Dimostrazione. Si tratta di mostrare che $R_n(x, x_0) \to 0$ al tendere di n all'infinito, per ogni $x \in x \in (x_0 - r, x_0 + r) \cap [a,b]$. E infatti

$$|R_n(x,x_0)| \leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n |f^{(n+1)}(tx + (1-t)x_0)| dt \leq M(\frac{|x-x_0|}{r})^{n+1} \to 0$$

La somma di una serie di potenze é una funzione analitica.

Sia $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ somma di una serie di potenze avente raggio di convergenza r, e siano $0 < \underline{r} < \overline{r} < r$. Da $\limsup_k |a_k|^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{\overline{r}}$ segue che

$$\exists\ \overline{k}: \qquad |a_{j+k}| \leq \frac{1}{\overline{r}^{j+k}}, \qquad \forall k \geq \overline{k}, \quad \forall j \in \mathbf{N}$$

Da $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!}\, a_{j+k}\, x^j$ segue

$$|x| \leq \underline{r} \Rightarrow \quad |f^{(k)}(x)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} \frac{\underline{r}^j}{\overline{r}^j} \frac{1}{\overline{r}^k}$$

Usando ora la formula $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!}\, x^j \;=\; \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \forall x \in (-1,1),$ otteniamo

$$|f^{(k)}(x)| \;\le\; \frac{k!}{\overline{r}^k(1\;-\;\underline{r}\;\;\overline{r}^{-1})^{k+1}} \;=\; \frac{\overline{r}\;k!}{(\overline{r}\;-\;\underline{r})^{k+1}}, \quad \forall k \ge \overline{k},\;\; |x| \le \underline{r}$$

Dalla Proposizione precedente segue che f é sviluppabile in serie di Taylor (di raggio di convergenza almeno $\overline{r} - \underline{r}$) attorno ad ogni punto dell'intervallo $[-\underline{r}, \underline{r}]$.

Principio di identitá Siano f, g analitiche in (a,b). Allora

$$\exists\, x_0 \in (a,b): \quad f^{(n)}(x_0) \;=\; g^{(n)}(x_0) \;\; \forall n \in \mathbf{N} \qquad \Rightarrow \qquad f \equiv g \;\text{ in}(a,b)$$

Dall'analiticitá: $\exists \delta > 0 : f(x) \;=\; g(x) \quad \forall x \;\in\; (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e quindi

$$b' := \sup\{x < b : \;\; f(t) \;=\; g(t) \quad \forall t \in [x_0, x]\} \;\ge\; x_0 + \delta > x_0$$

Ora, $x < b' \Rightarrow f \equiv g$ in $[x_0, x] \Rightarrow f^{(n)}(x) \;=\; g^{(n)}(x)$ in $[x_0, b'),\;\; \forall n.$

Se fosse $b' < b$, sarebbe , per continuitá, $f^{(n)}(b') \;=\; g^{(n)}(b') \;\; \forall n$ e quindi $f \equiv g$ in un intorno di b', contraddicendo la natura di sup di b'.

Zeri di funzioni analitiche Una funzione analitica in (a,b) e non identicamente nulla, ha, in (a,b), solo zeri isolati.

Se $x_n \to_n x \in (a,b)$, $f(x_n) \;=\; 0$ é $f(x) \;=\; 0$ ed inoltre, per il teorema di Rolle, $\exists x'_n$ tra x_n e x tale che $f'(x'_n) \;=\; 0$ e quindi $f'(x) \;=\; \lim_n f'(x'_n) \;=\; 0$ Iterando l'argomento, si trovano, per ogni $k \in \mathbf{N}$, $x_n^{(k)}$ zeri di $f^{(k)}$ che convergono a x e quindi $f^{(k)}(x) \;=\; 0 \quad \forall k$ e quindi $f \equiv 0$.

ESERCIZI.

1. Serie di Taylor di $\sin^2 x$. Da $\sin^2 x \;=\; \frac{1-\cos(2x)}{2}$, segue

$$\sin^2 x \;=\; \frac{1}{2}\,[1 - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{2n!}] \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{2n!} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{2k+1}}{(2k+2)!}\, x^{2k+2}$$

2. Serie di Taylor di $E(x) \;:=\; \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$

$$E(x) \;=\; \int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}]\, dt \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x [\frac{t^{2n}}{n!}]\, dt \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$