AM2-2005: Tracce delle lezioni-I settimana

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

CONVERGENZA PUNTUALE. Siano $f_n,\ n \in \mathbf{N}$ funzioni definite su di un sottoinsieme E di $\mathbf{R}$.

Se, $\forall\, x \in E$, **esiste finito** $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, diremo che la successione di funzioni f_n **converge puntualmente** (o semplicemente) in E alla funzione

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in E.$$

ESEMPI. Se $f_n(x) \equiv a_n, \quad x \in E \subset \mathbf{R}$, le f_n convergono se e solo se a_n converge e, in tal caso, $\lim_n f_n(x) \equiv \lim a_n$.

Se $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$, allora f_n converge alla funzione che vale zero in $[0,1)$ e vale 1 in $x = 1$.

In generale le proprietá delle f_n non si conservano nel limite puntuale. Nell'esempio $f_n(x) = x^n,\ x \in [0,1]$ le f_n sono continue, ma il loro limite non lo é.

CONVERGENZA UNIFORME. Se f_n converge puntualmente in E ad f, si dice che la convergenza é uniforme (in E) se

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \to_{n\to\infty} 0$$

ESEMPI. 1. La successione $f_n(x) = x^n$ converge uniformemente a zero in $[0,a]$ se $0 < a < 1$, ma la convergenza **non é uniforme** in $[0,1)$. Infatti

$$\sup_{x\in[0,a]} x^n = a^n \to 0 \qquad \text{mentre} \qquad \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1$$

2. (**Traslazioni**). Sia f una funzione (non identicamente nulla) nulla fuori di $(0,1)$. Siano $f_n(x) := f(x-n)$ le traslate di f. Allora $f_n(x) \to_{n\to\infty} 0$ $\forall x \in \mathbf{R}$, ma la convergenza **non é uniforme**, giacché $\sup_{\mathbf{R}} |f_n| = \sup_{\mathbf{R}} |f|$.

3. (**Cambi di scala**). Sia f una funzione (non identicamente nulla) nulla fuori di $(0,1)$. Siano $f_n(x) := f(nx)$. Allora $f_n(x) \to_{n\to\infty} 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, ma la convergenza **non é uniforme**, giacché $\sup_{\mathbf{R}} |f_n| = \sup_{\mathbf{R}} |f|$.

4. $f_n(x) := \min\{n, \frac{1}{x}\} \to_{n\to\infty} \frac{1}{x}, \;\; \forall x \in (0,1]$, ma la convergenza **non é uniforme** in $(0,1]$. Infatti $\sup_{(0,1]} \frac{1}{x} = +\infty$ mentre vale chiaramente la seguente

Proprietá.

$$\sup_{x\in E} |f_n(x)| < +\infty, \quad f_n \to_{n\to\infty} f \quad \text{uniformemente in E} \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\in E} |f(x)| < +\infty$$

Il criterio di Cauchy.

f_n é uniformemente convergente in E se e solo f_n é " **Cauchy uniforme** ":

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists n_\epsilon : \;\; n, m \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\in E} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

Dimostrazione.

NECESSITÁ: $f_n \to f$ uniformemente in E $\Rightarrow$
$\exists n_\epsilon : \;\; |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \epsilon \; \forall x \in E$ se $n, m \geq n_\epsilon$.

SUFFICENZA: intanto, per ogni fissato x in E, la successione $n \to f_n(x)$ é di Cauchy, e quindi $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ esiste finito per ogni x in E.

Poi, dall'ipotesi, fissato $\epsilon > 0$, $\exists n_\epsilon$ tale che

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{n+p}(x)| + |f_{n+p}(x) - f(x)| \leq \epsilon + |f_{n+p}(x) - f(x)| \;\; \forall x \in E$$

se $n \geq n_\epsilon$ e quale che sia $p \in \mathbf{N}$. Fissato $n \geq n_\epsilon$ e mandando p all'infinito in $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon + |f_{n+p}(x) - f(x)| \;\; \forall x \in E$ si ottiene $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \;\; \forall x \in E$ e per ogni $n \geq n_\epsilon$ cioé f_n converge uniformemente ad f.

Teorema 1 (la convergenza uniforme conserva la continuitá).

$$f_n \in C(E), \quad f_n \to_n f \quad \text{uniformemente in} \quad E \quad \Rightarrow \quad f \in C(E)$$

Dimostrazione. Fissato $\epsilon > 0$ siano n_ϵ, $\delta_\epsilon > 0$ tali che
$|f_{n_\epsilon}(x) - f(x)| \leq \epsilon, \;\; \forall x \in E, \;\; |f_{n_\epsilon}(x) - f_{n_\epsilon}(x_0)| \leq \epsilon \;\; \forall x \in E, |x - x_0| \leq \delta_\epsilon$. Allora

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2\epsilon, \;\; \forall x \in E, |x - x_0| \leq \delta_\epsilon$$

NOTA. Se la convergenza non é uniforme il limite puó non essere continuo.

Controesempio: $f_n(x) = x^n, \;\; x \in [0,1]$.

Teorema 2 (Passaggio al limite sotto segno di integrale)

$$f_n \in C([a,b]), \quad f_n \to_n f \ \text{ uniformemente in } \ [a,b] \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \ = \ \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

Dimostrazione. Infatti, f é continua in $[a,b]$ e

$$|\int\limits_a^b f_n \ - \ \int\limits_a^b f| \ \le \ \int\limits_a^b |f_n - f| \ \le \ (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \ \to_{n\to\infty} 0$$

NOTA. (i) **In generale**, $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \ \neq \ \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$.
Ad esempio, se $f(x) := \frac{x}{1+x^4}$, si ha $f_n(x) := nf(nx) = \frac{n^2x}{1+n^4x^4} \to_n 0 \ \forall x \in R$
ma $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^n f \to \int_0^\infty \frac{xdx}{1+x^4} \neq 0 \ = \ \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$.

(ii) **Il Teorema 2 non si estende agli integrali impropri.** Ad esempio, se $f \in C(\mathbf{R})$ é limitata ed integrabile in $\mathbf{R}$ con $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \neq 0$, é

$$f_n(x) := \frac{1}{n} f(\frac{x}{n}) \to_n 0 \quad \text{uniformemente in} \quad \mathbf{R} \quad \text{ma} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \neq 0$$

Teorema 3 (il limite delle derivate é la derivata del limite).

Siano I intervallo aperto, $f, g : I \to \mathbf{R}$, $f_n \in C^1(I)$ tali che $f_n(x) \to_n f(x)$ e $f'_n(x) \to_n g(x)$ in I. Allora

$$f'_n \to_n g \quad \text{uniformemente in} \quad I \quad \Rightarrow \quad f \in C^1(I) \quad \text{e} \quad (\lim_n f_n)' \equiv \lim_n f'_n$$

Dimostrazione. Se $x_0 \in I$, le ipotesi piú il TFC ed il Teorema 2, danno:

$$f(x) \ = \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^x f'_n(t)dt \ = \ f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t)dt$$

NOTA. La convergenza uniforme delle f'_n é essenziale. Controesempio:

Se $f_n(x) := |x|^{1+\frac{1}{n}}$, $x \in (-1,1)$, si ha $f'_n(x) = (1+\frac{1}{n})\frac{x}{|x|}|x|^{\frac{1}{n}} \to_{n\to\infty} \frac{x}{|x|}$, per $x \neq 0$ e $f'_n(0) \to_n 0$ (la convergenza non é uniforme!) e $f_n(x) \to |x|$, $\forall \ x \in (-1,1)$, che non é derivabile in $x = 0$.

Passaggio al limite negli integrali impropri Se

(i) $f_n \to_n f$ uniformemente su $[a+\delta, M], \ \forall \ \delta > 0, M > a$

(ii) (**equidominatezza**) $\exists g$ tale che $|f_n(x)| \leq g(x) \ \forall n, x$ con $\int\limits_a^\infty g < +\infty$

allora $$\lim_n \int\limits_a^\infty f_n = \int\limits_a^\infty \lim_n f_n$$

Infatti: $\delta > 0$, $M > a+\delta \Rightarrow |\int\limits_{a+\delta}^M f_n - f| \to_{n\to\infty} 0 \Rightarrow \limsup_n |\int\limits_a^\infty f_n - f| \leq$

$$\limsup_n \left[\int\limits_a^{a+\delta} |f_n - f| + \int\limits_M^\infty |f_n - f| \right] \leq 2 \int\limits_a^{a+\delta} g + 2 \int\limits_M^\infty g \leq \epsilon \quad \text{se} \quad M \geq M(\epsilon),\ \delta < \delta_\epsilon$$

Esempio 1. $t_n \to_{n\to\infty} t > 0 \Rightarrow \lim_n \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ e^{-t_n x}\, dx = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ e^{-tx}\, dx$

Equidominatezza : $t_n \geq \frac{t}{2} \Rightarrow |\frac{\sin x}{x} e^{-t_n x}| \leq e^{-\frac{tx}{2}}, \ \forall x \geq 0.$

Convergenza uniforme sui limitati : $|x| \leq M \Rightarrow$

$$|\frac{\sin x}{x} [e^{-t_n x} - e^{-tx}]| \leq |e^{(t-t_n)x} - 1| \leq \epsilon \text{ se } |t - t_n| M \leq \delta_e$$

NOTA Dunque $t \to \int\limits_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, dx$ é continua in $(0, +\infty)$

Esempio 2. $t \to \int\limits_0^\infty e^{-tx} \ \frac{\sin x}{x}\, dx$ é derivabile in $(0, +\infty)$ con

$$\frac{d}{dt} \int\limits_0^\infty e^{-tx} \ \frac{\sin x}{x}\, dx = \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt} \left[e^{-tx} \ \frac{\sin x}{x} \right] dx = -\int_0^{+\infty} e^{-tx} \ \sin x\, dx$$

ovvero $t > 0$, $h_n \to_{n\to\infty} 0 \Rightarrow$

$$\lim_n \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} \left[\frac{e^{-(t+h_n)x} - e^{-tx}}{h_n} \right] dx = -\int\limits_0^\infty \sin x\, e^{-tx}\, dx$$

Equidominatezza: $|\frac{e^{-(t+h_n)x} - e^{-tx}}{h_n}| \leq 2xe^{-tx}, \ \forall x \geq 0$ se $|h_n|$ é piccolo.

Convergenza uniforme sui limitati: $|x| \leq M \Rightarrow |\frac{\sin x}{x} [\frac{e^{-(t+h_n x)} - e^{-tx}}{h_n} + xe^{-tx}]| \leq$

$$\leq |\frac{e^{-h_n x} - 1}{h_n} + x| = x|1 - \int_0^1 e^{-\tau h_n x}\, d\tau| \to_{n\to\infty} 0 \quad \text{uniformemente in} \quad x \in [0, M]$$

Passaggio al limite in certi integrali impropri senza equidominatezza

$$f \quad \text{limitata ed integrabile in } [0,+\infty) \;\Rightarrow\; \int_0^\infty f(x)\, e^{-\frac{x}{n}}\, dx \to_n \int_0^\infty f(x)\, dx$$

Se $\int_0^{+\infty} |f| < +\infty$ siamo nella situazione di equidominatezza, che invece non sussiste se $\int_0^{+\infty} |f| = +\infty$.

Sia $F(x) := \int_0^x f$, $F(+\infty) := \int_0^{+\infty} f$. Integrando prima per parti ed effettuando poi il cambio di variabile $x = nt$ troviamo

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-\frac{x}{n}}\, dx = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} F(x)\, e^{-\frac{x}{n}}\, dx = \int_0^{\infty} F(nt)\, e^{-t}\, dt$$

$$\int_0^{\infty} F(nt)\, e^{-t}\, dt \to_{n\to\infty} \int_0^\infty \lim_n F(nt) e^{-t} dt = \int_0^\infty F(+\infty)\, e^{-t}\, dt = \int_0^\infty f(x)\, dx$$

ove il passaggio al limite é lecito perché c'é

uniforme convergenza: $|F(nt) - F(+\infty)| = |\int_{nt}^{\infty} f| \le \epsilon$, se $nt \ge M_\epsilon$

equidominatezza: $|F(nx)e^{-x}| \le e^{-x} \sup_{x\ge 0} |F(x)|$ e $\sup_{x\ge 0} |F(x)| < +\infty$.

Esempio. $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{n}} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

Integrale di Dirichlet $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Infatti, da $\frac{d}{dt} \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, dx = -\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x\, dx = -\frac{1}{1+t^2}$ segue

$$\int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx = -\arctan t + c \to_{t\to+\infty} -\frac{\pi}{2} + c$$ Siccome

$|\int_0^\infty e^{-nx} \frac{\sin x}{x} dx| \le |\int_0^\infty e^{-nx} dx| = \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-t}\, dt = \frac{1}{n} \to_{n\to+\infty} 0 \;\Rightarrow\; c = \frac{\pi}{2}$ si ha

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{n}} \frac{\sin x}{x}\, dx = -\arctan\frac{x}{n} + \frac{\pi}{2} \to_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2}$$

D'altra parte, $\lim_n \int_0^\infty e^{-\frac{x}{n}} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$

Successioni di funzioni: Esercizi e Complementi.

1 Fissato $p \in \mathbf{N}$, $f_n(x) := \frac{n \sin^p x}{x(1+n^2x^2)} \to_{n\to+\infty} 0, \quad \forall x > 0$
La convergenza é uniforme in $[\delta, +\infty)$ per ogni $\delta > 0$:

$$x \geq \delta \Rightarrow |f_n(x)| \leq \frac{n}{\delta(1+n^2\delta^2)} \to_{n\to+\infty} 0$$

Se $p \geq 3$, la convergenza é uniforme anche in $[0,1]$: $0 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |f_n(x)| =$

$$|(\frac{\sin x}{x})^p \frac{nx^{p-1}}{1+n^2x^2}| \leq \frac{nx^{p-1}}{1+n^2x^2} \leq \frac{(nx)^2}{n(1+n^2x^2)} \leq \frac{1}{n}\,[\sup_{t\in\mathbf{R}} \frac{t^2}{1+t^2}] \to_{n\to+\infty} 0$$

Invece, se $p \leq 2$, la convergenza in $[0,1]$ non é uniforme:

$$\sup_{0<x\leq 1} |f_n(x)| \geq f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}n^2 \sin^p \frac{1}{n} \to \frac{1}{2} \quad \text{se} \quad p = 2 \quad \text{e diverge se} \quad p = 1$$

2 $f_n(x) := \int\limits_0^x \arctan nt\, dt \to_{n\to+\infty} = \frac{\pi}{2}x\ \forall x \geq 0$ uniformemente sui limitati.
Infatti, $0 \leq x \leq M \quad \Rightarrow \quad |\int_0^x \arctan nt dt - \frac{\pi}{2}x| \leq \int_0^M |\arctan nt - \frac{\pi}{2}| dt \to_{n\to\infty} 0$ giacché $\arctan nt \to_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2}$ uniformemente in $\{|x| \geq \delta\}$ ed é equidominata in $[0, M]$ $\forall M$, perché é uniformemente limitata : $|\arctan nx| \leq \frac{\pi}{2}$.

3 Sia $r > 0$. $f_n(x) := \frac{n\, x^r}{1+n^2x^2} \to_{n\to\infty} 0 \quad \forall x \geq 0$ e la convergenza é uniforme in $[0, +\infty)$ sse $1 < r \leq 2$. Infatti,

$$r > 2 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\geq 0} f_n(x) = +\infty$$

$$1 < r \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\geq 0} f_n(x) = n^{1-r} \sup_{s\geq 0} \frac{s^r}{1+s^2} \to_n 0$$

$$0 < r \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\geq 0} f_n(x) = n^{1-r} \sup_{s\geq 0} \frac{s^r}{1+s^2} \geq \sup_{s\geq 0} \frac{s^r}{1+s^2}$$

Se $r \geq 2$ la convergenza é uniforme in $[0, M]$ $\forall M > 0$, perché $r \geq 2 \Rightarrow$

$$f_n'(x) := n\, \frac{x^{r-1}[r - n^2x^2(2-r)]}{(1+n^2x^2)^2} > 0\ \forall x > 0 \ \Rightarrow \sup_{x\leq M} f_n(x) = f_n(M) \to_{n\to\infty} 0$$

Se $r \in (0,1]$, la convergenza é uniforme in $[\delta, +\infty)$ perché, per n grande,

$$x \geq \delta \quad \Rightarrow \quad x \geq \sqrt{\frac{r}{n^2(2-r)}} \quad \Rightarrow \quad f_n'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\geq\delta} f_n(x) = f_n(\delta) \to_{n\to\infty} 0$$

4. $\quad f_n \to_{n\to\infty} f$ uniformemente in $[a,+\infty)$, $\quad f_n(x) \to_{x\to+\infty} 0 \ \ \forall n$

$$\Rightarrow \ f(x) \to_{x\to+\infty} 0$$

Infatti, $|f(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| \le \epsilon + |f_n(x)|$ se $n \ge n_e$ e quindi

$$\limsup_{x\to+\infty} |f(x)| \le \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0$$

Esempio. $\quad e^{-\frac{x^2}{n}} \to_n 1 \quad \forall x,$ $\quad$ quindi la convergenza non é uniforme in $\mathbf{R}$.

5 (Successioni di funzioni monotone: un Teorema di Dini)

Siano $f_n \in C([a,b])$ monotone. Se $f_n(x) \to_{n\to+\infty} f(x) \quad \forall x \in [a,b]$ ed f é continua in $[a,b]$, allora la convergenza é necessariamente uniforme.

Dimostrazione. Possiamo supporre le f_n non decrescenti (basta altrimenti considerare $-f_n$). Scriviamo

$$|f_n(x) - f(x)| \ = \ [\max\{f_n(x), f(x)\} \ - f(x)] \ + \ [\max\{f_n(x), f(x)\} \ - f_n(x)]$$

Notiamo che $\quad g_n(x) \ := \ \max\{f_n(x), f(x)\}$ $\quad$ é continua , non decrescente e

$$0 \ \le \ g_n(x) - f(x) \to_{n\to+\infty} 0 \quad \text{e} \quad 0 \ \le \ g_n(x) - f_n(x) \to_{n\to+\infty} 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

Si tratta dunque di provare che tale convergenza é uniforme.

Per assurdo : $\quad \exists c > 0 : \ c \le m_n := \max_{[a,b]} g_n - f \ = \ g_n(x_n) - f(x_n), \quad x_n \to_{n\to+\infty} x_0$

(ove siamo eventualmente passati ad una sottosuccessione convergente della x_n).

Ora, $\quad \forall \ \epsilon > 0, \ \exists \ \delta_\epsilon : \quad |f(x) - f(y)| \ \le \ \epsilon \quad \forall \, x, y \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$

Per n grande, $x_n \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e quindi, per monotonia,

$$m_n = g_n(x_n) - f(x_n) \ \le g_n(x_0 + \delta) \ - \ f(x_0 - \delta) \to_{n\to+\infty} 0$$

contraddizione. Argomento analogo per $g_n - f_n$.

6 (Convergenza monotona: un altro Teorema di Dini)

Siano $\ f_n \in C([a,b]), \quad f_n(x) \to_{n\to+\infty} 0 \ \forall x \in [a,b].$
Se $\ f_{n+1}(x) \le f_n(x) \ \forall x \in [a,b], n \in \mathbf{N},$ allora f_n converge a uniformemente in $[a,b]$.

Dimostrazione. Chiaramente le f_n sono funzioni non negative e

$$\exists\ x_n \in [a,b]\ :\quad 0 \leq m_n\ :=\ \max_{x\in[a,b]} f_n(x)\ =\ f_n(x_n)$$

É $\quad m_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n) = m_n$ ed $\exists x_0, n_k :\ x_{n_k} \to_{k\to+\infty} x_0$.

Fissato $\epsilon > 0$, sia $f_{n_\epsilon}(x_0) \leq \epsilon$. Siccome f_{n_ϵ} é continua in $x_0 \in [a,b]$,

$$\exists \delta_\epsilon :\quad f_{n_\epsilon}(x)\ \leq\ f_{n_\epsilon}(x_0)\ +\ \epsilon\ \leq\ 2\epsilon \quad \forall x \in [a,b] \cap [x_0-\delta_\epsilon, x_0+\delta_\epsilon]$$

Quindi, per $n_k > n_\epsilon$ tale che $x_{n_k} \in \cap[x_0-\delta_\epsilon, x_0+\delta_\epsilon]$, risulta

$$m_{n_k}\ =\ f_{n_k}(x_{n_k})\ \leq\ f_{n_\epsilon}(x_{n_k})\ \leq\ 2\epsilon \quad \text{e quindi} \quad m_{n_k} \to_{k\to+\infty} 0$$

e quindi, essendo m_n monotona, $m_n \to_{n\to+\infty} 0$.

7. $\quad f_n \to_n f$ uniformemente in E, $\quad \sup_{x\in E} |f(x)| < +\infty \quad \Rightarrow$

$\sup_n \left(\sup_{x\in E} |f_n(x)| \right) < +\infty$ (ovvero la successione é **uniformemente limitata**)

Infatti, la successione numerica $\ n \to \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|\ $ é limitata (in quanto convergente), cioé $\quad \exists M > 0 :\quad |f_n(x) - f(x)| \leq M \quad \forall x \in E, \forall n \in \mathbf{N}$. Quindi

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq M + \sup_{x\in E} |f(x)| \quad \forall x \in E, \forall n \in \mathbf{N}$$

Esempio. $\frac{1+n^4x^2+n^3x^4}{1+n^4x^2+x^6} \to_n 1 \quad \forall x$ ma

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \frac{1+n^4x^2+n^3x^4}{1+n^4x^2+x^6} \geq \frac{1+n^6+n^7}{1+n^6+n^6} \to_n +\infty$$

e quindi la convergenza non é uniforme.

8 (Teorema di Ascoli-Arzela')

Siano $\quad f_n \in C^1([a,b]) \quad$ tali che $\qquad \sup_{x\in[a,b], n\in\mathbf{N}} |f_n(x)| + |f_n'(x)|\ :=\ M\ <\ +\infty$

Allora $\quad \exists\, n_k :\quad f_{n_k}$ converge uniformemente in $[a,b]$.

Schema di dimostrazione

(i) (**diagonalizzazione di Cantor**) Sia $D := \{x_j : \ j \in \mathbf{N}\}$ denso in $[a,b]$.

Allora $\exists \ \alpha_j \in \mathbf{R}, \ n_k < n_{k+1} : \quad f_{n_k}(x_j) \to_{k\to+\infty} \alpha_j \quad \forall \, j$

Infatti $|f_n(x_1)| \leq M \ \Rightarrow \ \exists \alpha_1, \ \phi_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strettamente crescente tale che

$$|f_{\phi_1(k)}(x_1) \ - \ \alpha_1| \ \leq \frac{1}{k} \quad \forall \, k.$$

Ugualmente,

$\exists \phi_2, \ \alpha_2 : \quad |f_{\phi_1(\phi_2(k))}(x_2) \ - \ \alpha_2| \ \leq \ \frac{1}{k} \quad \forall \, k.$ Notiamo che si ha anche

$|f_{\phi_1(\phi_2(k))}(x_1) - \alpha_1| \ \leq \ \frac{1}{\phi_2(k)} \leq \frac{1}{k}.$ Iterando, troviamo al passo j:

$$\exists \ \phi_j, \ \alpha_j : \qquad |f_{\phi_1 \circ \ldots \circ \phi_j(k)} \, (x_i) \ - \ \alpha_i| \ \leq \ \frac{1}{k} \quad \forall \, k, \ \ i \leq j$$

Basta ora prendere $n_k \ = \ (\phi_1 \circ \ldots \circ \phi_k)(k)$

(ii) Sia $f(x_j) = \lim_{k\to+\infty} f_{n_k}(x_j)$. Si ha che

$$|f(x_i) - f(x_j)| \ \leq \ M|x_i - x_j| \ \forall i,j$$

e quindi f si prolunga ad una $\overline{f}$ Lipschitziana (di costante M) in tutto $[a,b]$.

Infatti $$|f(x_i) - f(x_j)| \leq$$

$$\leq \ |f(x_i) - f_{n_k}(x_i)| \ + \ |f_{n_k}(x_i) - f_{n_k}(x_j)| \ + \ |f_{n_k}(x_j) - f(x_j)| \ \leq$$
$$\leq \ M|x_i - x_j| \ + \ |f(x_i) - f_{n_k}(x_i)| \ + \ |f_{n_k}(x_j) - f(x_j)|, \qquad \forall i,j$$

Basta ora mandare k all'infinito.

(iii) $f_{n_k} \to_{k\to+\infty} \overline{f}$ uniformemente in $[a,b]$.

Infatti, fissato $\epsilon > 0$, siano $N \ \geq \frac{b-a}{\epsilon}$, $I_j \ := \ [a + (j-1)\frac{b-a}{N}, a + j\frac{b-a}{N}]$, $j = 1, \ldots, N$. Se $x \in [a,b]$, allora $x \in I_j$ per qualche j. Sia $x_j \in D \cap I_j$. Si ha

$$|f_{n_k}(x) \ - \ \overline{f}(x)| \ \leq \ |f_{n_k}(x) \ - \ f_{n_k}(x_j)| \ + \ |f_{n_k}(x_j) \ - \ \overline{f}(x_j)| \ + \ |f(x_j) \ - \ \overline{f}(x)| \ \leq$$

$$\leq \ 2M \, \frac{b-a}{N} \ + \ |f_{n_k}(x_j) \ - \ \overline{f}(x)|$$

e quindi, da $k \geq k_{\epsilon, x_1, \ldots, x_N} \ \Rightarrow \ |f_{n_k}(x_j) - \overline{f}(x_j)| \leq \epsilon$, segue $|f_{n_k}(x) - \overline{f}(x)| \leq 2\epsilon$.