AM2 2005-2006: RECUPERO I ESONERO

TEMA 1. Siano $f_n \in C^1(\mathbf{R})$. Supposto che esista $x_0 \in \mathbf{R}$ tale che la successione numerica $f_n(x_0)$ risulti convergente, provare che

$$f'_n \quad \text{é} \quad \text{Cauchy uniforme in} \quad (a,b) \quad \text{per ogni} \quad a<b \quad \Rightarrow$$

$$\forall \quad x \in \mathbf{R} \quad \exists \quad f(x) := \lim_n f_n(x) \qquad e \qquad f \in C^1(\mathbf{R})$$

Mostrare con un esempio che l'ipotesi "$\exists x_0 :\ f_n(x_0)$ converge" é essenziale.

TEMA 2. Sia $a_n \in C([\alpha,\beta])$, $M_n := \sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]} |a_n(x)|$. Provare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \quad \text{converge uniformemente in} \quad [\alpha,\beta].$$

Dedurre che, se $f_n \in C([\alpha,\beta])$, $L_n := \sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$, allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n < +\infty \quad \Rightarrow \quad f_n \quad \text{converge uniformemente in} \quad [\alpha,\beta].$$

TEMA 3. Siano $0 \le f_n \in C((\alpha,\beta))$, $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$ tali che la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converga uniformemente sui sottointervalli compatti di (α,β). Posto $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in (\alpha,\beta)$, provare che

$f(x)$ é a integrale convergente in (α,β) se e solo se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} f_n \right) < +\infty$

TEMA 4. Definire $\exp z$, $z \in \mathbf{C}$. Provare che

$\exp(z+w) = \exp z \ \exp w \quad \forall z,w \in \mathbf{C}$. Stabilire le formule di Eulero.

TEMA 5. Provare la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz.

ESERCIZIO 1 Sia $f_n(x) = \frac{1}{n^x \ \log n}$.

Trovare l'intervallo aperto I su cui la serie $\sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ converge e stabilire se la convergenza é anche uniforme in I.

Stabilire poi se $f(x) := \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ é derivabile in I e, in caso affermativo, calcolarne la derivata.

Stabilire infine se $f(x) := \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ é a integrale convergente in I.

ESERCIZIO 2 Calcolare il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n+1}}, \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \right) x^n$$

Discutere poi il comportamento agli estremi dei rispettivi intervalli di convergenza.

ESERCIZIO 3 Determinare tutti i valori complessi di $1^{\sqrt{2}}$.