Soluzioni

16/5/2005

Esercizio 1.

1) $\ell(\theta,\alpha) = n\log(\alpha) - n\log(\theta) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^n log(\frac{y_i}{\theta}) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{\theta}\right)^\alpha$

$$\frac{\partial \ell(\theta,\alpha)}{\partial\theta} = -\frac{n\alpha}{\theta} + \alpha\theta^{-1}\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{\theta}\right)^\alpha \Rightarrow \hat{\theta}_\alpha = \left(\frac{\sum y_i^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}.$$

2) $\ell_p(\alpha) = \ell(\hat{\theta}_\alpha,\alpha) = n\log(\alpha) - n\log(\hat{\theta}_\alpha) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^n \log\left(\frac{y_i}{\hat{\theta}_\alpha}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{\hat{\theta}_\alpha}\right)^\alpha.$

Esercizio 2. La funzione di verosimiglianza è:

$$L(\theta_1,\theta_2) \propto \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (y_i - \theta_1 - \theta_2 t_i)^2\}$$

quindi la logverosimiglianza è:

$$\ell(\theta_1,\theta_2) \propto -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (y_i - \theta_1 - \theta_2 t_i)^2.$$

Da cui si ottiene lo stimatore di massima verosimiglianza

$$\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2) = \left(\frac{\sum y_i}{n}, \frac{\sum y_i t_i}{\sum t_i^2}\right).$$

Osserviamo che $\ell(\hat{\theta}_0) = -\frac{1}{2}\sum y_i^2$ e calcoliamo il test $W(\mathbf{y}) = 2[\ell(\hat{\theta}) - \ell(\hat{\theta}_0)]$

$$W(\mathbf{y}) = \sum y_i^2 - \sum (y_i - \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2 t_i)^2 = \sum y_i^2 - \sum [y_i^2 + (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 t_i)^2 - 2y_i(\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 t_i)] =$$

$$= -\sum (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 t_i)^2 + 2\sum y_i\hat{\theta}_1 + 2\hat{\theta}_2 \sum y_i t_i =$$

$$= -n\hat{\theta}_1^2 - \hat{\theta}_2^2 \sum t_i^2 - 2\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 \sum t_i + 2\hat{\theta}_1 \sum y_i - 2\hat{\theta}_2 \sum y_i t_i =$$

$$= n\hat{\theta}_1^{\ 2} - \hat{\theta}_2^{\ 2}\sum t_i^2 + 2\hat{\theta}_2 \sum y_i t_i = n\hat{\theta}_1^{\ 2} + \frac{(\sum y_i t_i)^2}{\sum t_i^2} = \frac{(\sum y_i)^2}{n} + \frac{(\sum y_i t_i)^2}{\sum t_i^2}.$$

Osserviamo che sotto H_0 vale

$$cov(\sum_{i=1}^n y_i, \sum_{i=1}^n y_i t_i) = E(\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n y_i t_i) = \sum_{i=1}^n E(y_i \sum_{j=1}^n y_j t_j) = \sum_{i=1}^n t_i = 0$$

cioè $\sum y_i$ e $\sum y_i t_i$ sono incorrelate.
Inoltre sotto H_0 $\sum y_i \sim N(0, n)$ e $\sum y_i t_i \sim N(0, \sum t_i)$.
Quindi $\sum y_i$ e $\sum y_i t_i$, essendo normali e incorrelate, sono indipendenti.
Per cui sono indipendenti anche $\frac{(\sum y_i)^2}{n}$ e $\frac{(\sum y_i t_i)^2}{\sum t_i^2}$. Infine osserviamo che

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{n} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{n}}\right)^2 \sim \chi_1^2$$

$$\frac{\left(\sum y_i t_i\right)^2}{\sum t_i^2} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i t_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n t_i^2}}\right)^2 \sim \chi_1^2$$

Concludiamo che

$$W(\mathbf{y}) \sim [\chi_1^2 + \chi_1^2] \sim \chi_2^2.$$

Indicando con $q_{0.95,2}$ il quantile di livello 0.95 di un χ_2^2 la regione di rifiuto di livello 0.05 è

$$R = \{\mathbf{y} : W(\mathbf{y}) > q_{0.95,2}\}.$$

Esercizio 3. La densità $f(y)$ è $\alpha y^{\alpha-1}$ per $y \in (0, 1)$, infatti $\int_0^1 y^{\alpha-1} dy = 1/\alpha$. La funzione di verosimiglianza è quindi

$$L(\alpha) = \alpha^n \prod_{i=1}^n y_i^{\alpha-1}$$

La stima di massima verosimiglianza di α è

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{-\sum_{i=1}^n \log y_i}$$

Il rapporto delle verosimiglianze è

$$\lambda(y) = \frac{L(1)}{L(\hat{\alpha})} = \left(\frac{-\sum_{i=1}^n \log y_i}{n}\right)^n \exp\left(n + \sum_{i=1}^n \log y_i\right)$$

Posto $q = -\sum_{i=1}^n \log y_i$ abbiamo quindi che

$$\lambda(y) = \left(\frac{q}{n}\right)^n \exp\left(n - q\right)$$

per cui $\lambda(y)$ è una funzione di q crescente se $q < n$ e decrescente se $q > n$. Il criterio del rapporto di verosimiglianza porta quindi a rifiutare l'ipotesi nulla se $q = -\sum_{i=1}^n \log y_i$ è sufficientemente grande o sufficientemente piccolo (questi valori di q sono quelli che fanno si che $\lambda(y)$ sia molto lontano dal suo massimo in cui vale 1).

La regione critica sarà quindi del tipo

$$R = \left\{ y : -\sum_{i=1}^n \log y_i < k_1 \right\} \cup \left\{ y : -\sum_{i=1}^n \log y_i > k_2 \right\}$$

Per determinare k_1 e k_2 osserviamo che $-\log y_i$ sotto H_0 si distribuisce come una v.a. di tipo esponenziale con media 1. Infatti

$$P(-\log Y_i < z | H_0) = P(\log Y_i > -z | H_0) = P(Y_i > e^{-z} | H_0) =$$

$$= \int_{e^{-z}}^1 dy = 1 - e^{-z}.$$

Quindi, sotto H_0, si ha $-\sum_{i=1}^n \log Y_i \sim Gamma(n, 1)$ (essendo la somma di n esponenziali di media 1 e indipendenti).

Abbiamo quindi che i valori k_1 e k_2 sono rispettivamente i quantili di livello $\alpha/2$ e $1 - \alpha/2$ di una $Gamma(n, 1)$.