Soluzioni

3/5/2005

Esercizio 1. La funzione di densità congiunta è data da:

$$f(x_1, x_2; \theta) = \theta^2 x_1^{\theta-1} x_2^{\theta-1} I_{(0,1)}(x_1) I_{(0,1)}(x_2),$$

da cui segue che la funzione di potenza è:

$$\pi(\theta) = Prob((x_1, x_2) \in C_\alpha)|\theta) = \int_{C_\alpha} f(x_1, x_2; \theta) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_0^1 \theta x_1^{\theta-1} \left[\int_{\frac{3}{4}x_1}^1 \theta x_2^{\theta-1} dx_2 \right] dx_1 = \int_0^1 \theta x_1^{\theta-1} [x_2^\theta]_{\frac{3}{4}x_1}^1 dx_1 =$$

$$= \int_0^1 \theta x_1^{\theta-1} \left[1 - \left(\frac{3}{4} x_1 \right)^\theta \right] dx_1 = \int_0^1 \theta x_1^{\theta-1} - \left(\frac{3}{4} x_1 \right)^\theta \int_0^1 \theta x_1^{2\theta-1} dx_1 =$$

$$= [x_1^\theta]_0^1 - \left(\frac{3}{4} \right)^\theta \frac{\theta}{2\theta} [x_1^{2\theta}]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^\theta.$$

L'ampiezza α di un test è

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \pi(\theta).$$

Nel nostro caso si ha:

$$\alpha = \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^\theta \right\},$$

poichè la funzione di potenza è una funzione monotona non decrescente di θ, il sup si ha in corrispondenza di $\theta = 1$, quindi l'ampiezza è data da $\alpha = \frac{5}{8}$.

Esercizio 2. a) La funzione di potenza è data da:

$$\pi(\theta) = Prob(x \in C_\alpha|\theta) = \int_{C_\alpha} f(x; \theta) dx =$$

$$= \int_{1/2}^1 \theta x^{\theta-1} dx = [x^\theta]_{1/2}^1 = 1 - \frac{1}{2^\theta}.$$

da cui segue che:

$$\alpha = \sup_{\Theta_0} \pi(\theta) = \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \{1 - \frac{1}{2^\theta}\} = \frac{1}{2}.$$

b) Poiché le ipotesi a confronto sono entrambi semplici utilizziamo il Lemma di Neyman-Pearson per costruire un test più potente. La regione critica è definita dai valori di x tali che:

$$\frac{L(\theta_0; x)}{L(\theta_1; x)} \leq k_\alpha.$$

Ovvero:

$$\frac{f(x; \theta = 2)}{f(x; \theta = 1)} = 2x \leq k_\alpha \Rightarrow x \leq k'_\alpha$$

e quindi si ha che:

$$C_\alpha = \{x \in (0, 1) : x \leq k'_\alpha\}.$$

Inoltre dalla condizione:

$$\alpha = Prob(x \in C_\alpha | \theta_0) =$$

$$= \int_0^{k'_\alpha} 2x dx = [x^2]_0^{k'_\alpha} = (k'_\alpha)^2$$

segue che:

$$k'_\alpha = \sqrt{\alpha}.$$

c) Dal punto b) sappiamo che $\alpha = k'^2_\alpha$, inoltre

$$\beta = Prob(x \notin C_\alpha | \theta_1) =$$

$$= \int_{k'_\alpha}^1 dx = [x]_{k'_\alpha}^1 = 1 - k'_\alpha.$$

Quindi:

$$\alpha + \beta = k'^2_\alpha + 1 - k'_\alpha.$$

Tale quantità è minimizzata per $k'_\alpha = \frac{1}{2}$. Il test richiesto è quindi definito dalla regione critica:

$$C = \{x \in (0, 1) : x \leq 1/2\}.$$

Esercizio 3. a) Per determinare il test richiesto utilizziamo il Lemma di Neyman-Pearson:

$$\frac{L(\theta_0; x)}{L(\theta_1; x)} \leq k_\alpha \Rightarrow \frac{f(x; \theta = 0)}{f(x; \theta = 1)} = \frac{1}{2x} \leq k_\alpha$$

$$\Rightarrow x \geq k'_\alpha.$$

Quindi la regione critica è determinata da:

$$C_\alpha = \{x \in (0,1) : x \geq k'_\alpha\}.$$

Inoltre:

$$\alpha = Prob(x \in C_\alpha | \theta = 0) =$$
$$\int_{k'_\alpha}^{1} dx = 1 - k'_\alpha$$
$$k'_\alpha = 1 - \alpha.$$

b) La funzione potenza è data da:

$$\pi(\theta) = Prob(x \in C_\alpha | \theta) =$$
$$= \int_{1/2}^{1} (2\theta x + 1 - \theta) dx = 1 - \int_{0}^{1/2} (2\theta x + 1 - \theta) dx =$$
$$= 1 - \frac{\theta}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2} = \frac{2+\theta}{4}.$$

Inoltre:

$$\alpha = \sup_{\Theta_0} \pi(\theta) = \sup_{-1 \leq \theta \leq 0} \frac{2+\theta}{4} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 4. L'intervallo

$$\left[\hat{\sigma}^2 - z_{\alpha/2} \frac{i(\hat{\sigma}^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}}, \hat{\sigma}^2 + z_{\alpha/2} \frac{i(\hat{\sigma}^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}} \right]$$

dove $i(\sigma^2)$ è l'informazione di Fisher relativa ad una singola osservazione, ha livello approssimato pari ad $1 - \alpha$.
Si tratta quindi solamente di trovare $i(\sigma^2)$:

$$L(\sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{\frac{n}{2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum y_i^2\}$$

$$\ell(\sigma^2) = -\frac{n}{2} log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum y_i^2$$
$$\ell'(\sigma^2) = -\frac{n}{2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} + \frac{1}{2} \sum y_i^2 \frac{1}{(\sigma^2)^2}$$
$$\ell''(\sigma^2) = \frac{n}{4\pi} \frac{1}{(\sigma^2)^2} - \frac{1}{2} \sum y_i^2 \frac{2\sigma^2}{(\sigma^2)^4} = \frac{n}{4\pi} \frac{1}{(\sigma^2)^2} - \frac{\sum y_i^2}{\sigma^2} \frac{1}{(\sigma^2)^2}$$

$$i(\sigma^2) = E\left(-\frac{1}{4\pi(\sigma^2)^2} + \frac{y^2}{\sigma^2}\frac{1}{(\sigma^2)^2}\right) = -\frac{1}{4\pi(\sigma^2)^2} + \frac{1}{(\sigma^2)^2}E\left(\frac{y^2}{\sigma^2}\right)$$

Sappiamo che se $y \sim N(0,\sigma^2)$ allora $\frac{y}{\sigma} \sim N(0,1)$ e $\frac{y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2$, dunque $E\left(\frac{y^2}{\sigma^2}\right) = 1$ e

$$i(\sigma^2) = -\frac{1}{4\pi(\sigma^2)^2} + \frac{1}{(\sigma^2)^2} = \frac{1}{(\sigma^2)^2}\left(1 - \frac{1}{4\pi}\right).$$

Dunque

$$i(\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} = 2\sigma^2\sqrt{\frac{\pi}{4\pi - 1}}$$

Poniamo $c := \sqrt{\frac{\pi}{4\pi-1}}$. Per cui l'intervallo è

$$\left[\hat{\sigma}^2 - z_{\alpha/2}\frac{2\hat{\sigma}^2 c}{\sqrt{n}}, \hat{\sigma}^2 + z_{\alpha/2}\frac{2\hat{\sigma}^2 c}{\sqrt{n}}\right]$$

Esercizio 5. Il test più potente è individuato dalla regione critica

$$C_\alpha = \left\{y : \frac{f(y;\theta = 0)}{f(y;\theta = 2)} \leq k_\alpha\right\} =$$

$$= \left\{y : \frac{\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n y_i^2\}}{\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (y_i - 2)^2\}} \leq k_\alpha\right\} =$$

$$= \left\{y : \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (y_i^2 - 4 + 4y_i - y_i^2)\} \leq k_\alpha\right\}$$

$$= \left\{y : \exp\{2\sum_{i=1}^n y_i - 2n\} \geq k_\alpha\right\}$$

Ovvero da valori elevati di $\sum_{i=1}^n y_i$, ovvero da valori elevati di $\bar{y}$.

Il test MP avrà quindi zona critica data da $\bar{y} > k_\alpha$ e poiché

$$\alpha = Prob\,(\bar{y} > k_\alpha \mid \theta = \theta_0 = 0) = Prob\left(N\left(0, \frac{1}{n}\right) > k_\alpha\right) =$$

$$= Prob\left(\frac{N\left(0, \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} > \frac{k_\alpha}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) = Prob(N(0,1) > k_\alpha\sqrt{n}).$$

Essendo $\alpha = 0.95$, $k_\alpha\sqrt{n}$ deve essere il quantile di livello 0.95 di una normale standard, ovvero $k_\alpha\sqrt{n} = 1.64$ ovvero $k_\alpha = \frac{1.64}{\sqrt{n}}$.
Quindi la regione critica è:

$$\{y : \bar{y} > \frac{1.64}{\sqrt{n}}\}.$$

Calcoliamo la potenza del test per $\theta = 2$:

$$Prob\left(\bar{y} > \frac{1.64}{\sqrt{n}} \mid \theta = 2\right) = Prob\left(\bar{y} - 2 > \frac{1.64}{\sqrt{n}} - 2 \mid \theta = 2\right) =$$

$$= Prob\left(\frac{\bar{y} - 2}{\frac{1}{\sqrt{n}}} > 1.64 - 2\sqrt{n} \mid \theta = 2\right) =$$

$$= Prob(N(0,1) > 1.64 - 2\sqrt{n}) = 1 - \Phi(1.64 - 2\sqrt{n}).$$

Se $n = 10$ e $\bar{y} = 1$ poiché $\frac{1.64}{\sqrt{n}} = 0.51$ rifiutiamo l'ipotesi nulla.