Soluzioni

4/04/2005

Esercizio 1. a) Calcoliamo la funzione generatrice dei momenti $M_X(t) = E(e^{tX})$:

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{\theta^2} x e^{-\frac{x}{\theta}} \, dx = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\infty x e^{-\left(\frac{1}{\theta}-t\right)x} \, dx.$$

Moltiplicando e dividendo per $\left(\frac{1}{\theta} - t\right)^2$ otteniamo

$$M_X(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\theta} - t\right)^2 \theta^2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\theta} - t\right)^2 x e^{-\left(\frac{1}{\theta}-t\right)x} \, dx = \frac{1}{\left(\frac{1}{\theta} - t\right)^2 \theta^2}$$

$$= \frac{1}{(1 - t\theta)^2}.$$

Inoltre sappiamo che $E(X^k) = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t)\Big|_{t=0}$, quindi:

$$E(X) = \frac{d}{dt} M_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \frac{1}{(1 - t\theta)^2}\Big|_{t=0} = \frac{2\theta}{(1 - t\theta)^3}\Big|_{t=0} = 2\theta$$

e

$$E(X^2) = \frac{d}{dt} M_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{6\theta^2}{(1 - t\theta)^4}\Big|_{t=0} = 6\theta^2$$

da cui si ottiene che la varianza è data da

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 6\theta^2 - 4\theta^2 = 2\theta^2.$$

b) Dobbiamo mostrare che la densità $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta^2} x \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}$ appartiene alla famiglia esponenziale ovvero si può scrivere come $d(x)\exp\{c(\theta) + a(\theta)t(x)\}$. Infatti si ha:

$$f_\theta(x) = x \exp\left\{-2\log(\theta) - \frac{1}{\theta}x\right\},$$

e ponendo $d(x) = x$, $c(\theta) = -2\log(\theta)$, $a(\theta) = -\frac{1}{\theta}$ e $t(x) = x$ concludiamo che la densità $f_\theta(x)$ appartiene alla famiglia esponenziale.

c) La distribuzione congiunta del campione $X_1, \ldots, X_n$ è data da

$$f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^n x_i \exp\left\{-2n\log\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i\right\}$$

e visto che $f_\theta(x)$ appartiene alla famiglia esponenziale si ha che $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ è una statistica sufficiente per θ.

d) Calcoliamo la funzione generatrice dei momenti sfruttando l'indipendenza delle variabili $X_1, \ldots, X_n$:

$$M_{T(\mathbf{X})}(t) = E\left(\exp\left\{t\sum_{i=1}^n X_i\right\}\right) = E\left(\prod_{i=1}^n e^{tX_i}\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^n E\left(e^{tX_i}\right) = \frac{1}{(1-t\theta)^{2n}}.$$

Questa è la funzione generatrice dei momenti di una $Gamma(2n, \frac{1}{\theta})$, quindi si ha che $T \sim Gamma(2n, \frac{1}{\theta})$

e) Calcoliamo la media di $\bar{X}$:

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E\left(X_i\right) = \frac{1}{n}n2\theta = 2\theta.$$

Da questo si deduce che la media campionaria non è uno stimatore corretto per θ, nonostante ciò è possibile correggerlo dividendolo per 2:

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{2n}\right) = \frac{1}{2}E(\bar{X}) = \frac{1}{2}2\theta = \theta,$$

quindi $T_c(X) = \frac{\bar{X}}{2}$ è uno stimatore corretto per θ.
N.B. Se fosse stato ad esempio $E(\bar{X}) = \frac{k}{\theta}$ non avremmo potuto correggerlo semplicemente ponendo $T_c(X) = k/\bar{X}$ dal momento che non necessariamente $E(\bar{X}^{-1}) = \frac{\theta}{k}$.

f) Poniamo $T^*(\mathbf{X}) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{2n}$, per definizione si ha che

$$MSE\left(T^*(\mathbf{X})\right) = Var\left(T^*(\mathbf{x})\right) - Bias^2\left(T^*(\mathbf{x})\right),$$

ma $Bias\left(T^*(\mathbf{x})\right) = E\left(T^*(\mathbf{X})\right) - \theta = 0$ in quanto lo stimatore è corretto. Quindi per l'inidpendenza si ha

$$MSE\left(T^*(\mathbf{X})\right) = Var\left(T^*(\mathbf{X})\right) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^n 2\theta^2 = \frac{\theta^2}{2n}.$$

g) La funzione di verosmiglianza è

$$L(\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^{2n} exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta}\right\}$$

per cui la logverosimiglianza è

$$\ell(\theta) = -2n\log\theta - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta},$$

quindi

$$\ell'(\theta) = \frac{-2n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta^2}$$

per cui ponendo $\ell'(\theta) = 0$ otteniamo

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{2n}.$$

La derivata seconda della logverosimiglianza è

$$\ell''(\theta) = \frac{2n}{\theta} - \frac{2n}{\theta^3}\sum_{i=1}^n x_i$$

per cui l'informazione di Fisher $I(\theta) = E[-\ell''(\theta)] = \frac{2n}{\theta^2}$ e il limite inferiore di Rao Cramer per la varianza di uno stimatore corretto di θ è

$$I(\theta)^{-1} = \frac{\theta^2}{2n}$$

ovvero quanto la varianza di $\hat{\theta}$ che era stata già calcolata al punto f).

h) Applicando la definizione di media

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{x}\frac{1}{\theta^2}xe^{-\frac{x}{\theta}}\,dx = \frac{1}{\theta}\int_0^\infty \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx = \frac{1}{\theta},$$

quindi $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}$ è uno stimatore corretto per $\frac{1}{\theta}$:

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E\left(\frac{1}{X_i}\right) = \frac{1}{n}\frac{n}{\theta} = \frac{1}{\theta}$$

Esercizio 2. La densità di una $Cauchy(1,\theta)$ è

$$f(x|\theta) = \frac{\pi}{1+(x-\theta)^2}$$

quindi la congiunta diventa

$$f(\mathbf{x}|\theta) = \pi^n \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \log\left(1+(x_i-\theta)^2\right)\right\}$$

che non può essere ricondotta alla famiglia esponenziale.

Esercizio 3. (a)

$$E(1/Z) = \int_0^\infty \frac{1}{z}\frac{\lambda^\delta}{\Gamma(\delta)} e^{-\lambda\, z} z^{\delta-1} dz \;=\; \int_0^\infty \frac{\lambda^\delta}{\Gamma(\delta)} e^{-\lambda\, z} z^{\delta-1-1} dz =$$

(integrabile solo se $\delta > 1$)

$$= \frac{\lambda^\delta}{\Gamma(\delta)}\frac{\Gamma(\delta-1)}{\lambda^{\delta-1}} \int_0^\infty \frac{\lambda^{\delta-1}}{\Gamma(\delta-1)} e^{-\lambda z} z^{\delta-1} dz \;=\; \frac{\lambda^\delta}{\Gamma(\delta)}\frac{\Gamma(\delta-1)}{\lambda^{\delta-1}}$$

A questo punto sapendo che $\Gamma(\delta) = \int_0^\infty x^{\delta-1}e^{-x}dx$ e integrando per parti si ottiene la formula

$$\Gamma(\delta-1) = \frac{\Gamma(\delta)}{\delta-1},$$

concludiamo che

$$E(1/Z) = \frac{\lambda}{\delta-1}$$

In modo analogo (ovvero sempre integrando una densità di tipo gamma) si ottiene che

$$E(1/Z^2) = \int_0^\infty \frac{1}{z^2}\frac{\lambda^\delta}{\Gamma(\delta)} e^{-\lambda\, z} z^{\delta-1} dz = \int_0^\infty \frac{\lambda^\delta}{\Gamma(\delta)} e^{-\lambda\, z} z^{\delta-3} dz =$$

$$= \frac{\lambda^2}{(\delta-2)(\delta-1)}$$

Posto $W = 1/Z$

$$Var(W) = E(W^2) - E(W)^2 = E(1/Z^2) - [E(1/Z)]^2 =$$

$$= \frac{\lambda^2}{(\delta-2)(\delta-1)} - \left(\frac{\lambda}{\delta-1}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{(\delta-1)^2(\delta-2)}$$

(b)

(1) La funzione di verosimiglianza è data da

$$L(\theta) = \theta^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta-1} = \exp\left\{n\log\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^n \log x_i\right\}$$

e il suo logaritmo da

$$l(\theta) = n\log\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^n \log x_i.$$

Per trovare lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\theta}$ deriviamo $l(\theta)$:

$$\frac{d}{d\theta}l(\theta) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \log x_i \Leftrightarrow \hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}.$$

$$\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}$$

(2) Dobbiamo calcolare $E(\hat{\theta})$. Osserviamo che $Y = -\log X$ è una v.a. esponenziale di parmetro θ. Infatti poniamo $y = -\log x$ e quindi $x = e^{-y}$ dunque

$$f_Y(y) = f_X(e^{-y}) \left| \frac{d}{dy} e^{-y} \right| = \theta e^{-\theta y},$$

Quindi, poiché la somma di n v.a. esponenziali di parametro θ si distribuiscono come una $Gamma(n, \theta)$, si ha

$$-\sum_{i=1}^{n} \log x_i \sim Gamma(n, \theta) \Rightarrow -\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i} \Rightarrow GI(n, \theta),$$

dove $GI(n, \theta)$ è una Gamma Inversa. Ora

$$E\left(-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}\right) = \frac{1}{n-1}\theta \Rightarrow E(\hat{\theta}) = \frac{n}{n-1}\theta.$$

Lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\theta}$ non è corretto ma asintoticamente corretto, infatti

$$Bias(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta = \frac{1}{n-1}\theta \to 0.$$

(3) Poichè $Var((\hat{\theta})) = n^2 Var(1/Z^2)$ dove $Z = -\sum_{i=1}^{n} \log x_i$ è una $Gamma(n, \theta)$ allora

$$Var((\hat{\theta})) = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}$$

che converge a 0 quando n va ad infinito. Essendo lo stimatore asintoticamente corretto quando n va ad infinito $\hat{\theta}$ si concentra sempre di più intorno a θ e quindi ci converge in probabilità.

(4) Uno stimatore corretto è $\frac{n-1}{n}\hat{\theta}$ la cui varianza è quindi $\theta^2/(n-2)$
La derivata seconda della logverosmiglianza è $-n/\theta^2$ per cui il limite inferiore di Rao Cramer è θ^2/n

(5) L'efficienza sarà quindi

$$\frac{\theta^2/n}{\theta^2/(n-2)} = \frac{n-2}{n}$$

Che cosa significa che l'efficienza tende ad 1 quando n va ad infinito?

(6) Per la proprietà di invarianza degli stimatori di massima verosimiglianza, essendo invertibili le funzioni $1/\theta$ e $\theta(1-\theta)$, gli stimatori sono $1/\hat{\theta}$ e $\hat{\theta}(1-\hat{\theta})$.