Tutorato III

4/04/2005

Esercizio 1. Siano $X_1, ..., X_n$ i.i.d. estratti da una popolazione X con funzione di densità

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta^2} x \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}$$

con $x > 0$ e $\theta > 0$.

a) Calcolare la funzione generatrice dei momenti, $E(X)$ e $Var(X)$.

b) Valutare se la distribuzione appartiene alla famiglia esponenziale.

c) Trovare la statistica sufficiente per θ.

d) Utilizzando la funzione generatrice dei momenti, calcolare la distribuzione della statistica sufficiente del punto c).

e) Valutare se la media campionaria $\bar{X}$ è uno stimatore corretto per θ. Nel caso non lo fosse provare a correggerlo.

f) Calcolare l'MSE dello stimatore corretto calcolato al punto e).

g) Calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ e verificare che è corretto e la sua varianza raggiunge il limite inferiore di Rao-Cramer.

h) Calcolare il valore atteso di $\frac{1}{X}$. Utilizzando questa informazione provare a costruire uno stimatore corretto di $\frac{1}{\theta}$.

Esercizio 2. Mostrare che $X \sim Cauchy(1, \theta)$ non appartiene alla famiglia esponenziale ad un parametro.

Esercizio 3. Attenzione: il punto a può essere utile per il punto b.

a) Sia Z una v.a. $Gamma(\lambda, \delta)$ verificare che E(1/Z)= $\lambda/(\delta - 1)$ purché $\delta > 1$, che $E(1/Z^2) = \lambda^2/((\delta - 2)(\delta - 1))$ purché $\delta > 2$ e trovare $Var(1/Z)$

b) Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione estratto dalla densità

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$$

1. Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza per θ.
2. Vedere se è corretto o asintoticamente corretto
3. Verificare che converge in probabilità a θ
4. Trovare uno stimatore corretto e vedere se la sua varianza raggiunge il limite inferiore di Rao Cramer
5. Trovare la sua efficienza, ovvero il rapporto tra il limite inferiore di Rao Cramer e la varianza dello stimatore.
6. Trovare gli stimatori di massima verosimiglianza di $1/\theta$ e di $\theta(1-\theta)$