Esonero 2 - MF1

A.A. 2004/2005

1.

(a) Valutare tramite un modello binomiale a 2 periodi il premio di una call su azione, con $S_0 = 10$ €, $K = 10$ € e $T = 1$, assumendo che il prezzo dell'azione possa salire o scendere coerentemente con il modello di Black-Scholes con $r = 5\%$ e $\sigma = 10\%$. Determinare esplicitamente il vettore della probabilità neutrale al rischio ed i portafogli di replica.

(b) Valutare il premio della stessa opzione call nel modello di Black-Scholes.

2. Determinare il premio di un'opzione call nell'ambito del modello di Black-Scholes per $T \to +\infty$

3.

(a) Determinare con il metodo bootstrap la curva dei rendimenti dai seguenti dati:

	Cedole	Prezzi	Scadenze
B_1	0	98.75	0.5
B_2	6%	101.5	1
B_3	5%	103	1.5

(b) Determinare il prezzo di un'obbligazione B_4 con scadenza 1 anno, cedola 4.5%, pagamento semestrale, in assenza di opportunità di arbitraggio.

(c) Calcolare il tasso di rendimento interno di B_4 e la sua duration.

4. Si consideri un portafoglio di investimento costituito da posizioni lunghe su azioni della società **A** del valore di \$ 7 milioni e della società **B** del valore di \$ 4 milioni. Se la volatilità giornaliera del titolo A è del 2.5% e del titolo B è del 1%, calcolare:

(a) Il VaR decadale a livello di confidenza 99% per la sola posizione su A.

(b) Il VaR decadale a livello di confidenza 99% per la sola posizione su B.

(c) Anzichè considerare le due attività separatamente, si calcoli il VaR a livello di confidenza 99% del portafoglio complessivo, ipotizzando che la correlazione tra i tassi di rendimento delle due azioni sia $\rho = 0.6$.

Soluzioni Esonero 2 - MF1

A.A. 2004/2005

1. I valori di u e d coerenti con il modello di Black-Scholes, con $N = 2$, $T = 1$, $r = 5\%$ e $\sigma = 10\%$ sono

$$\begin{aligned} u_N &= \left(1 + \tfrac{RT}{N}\right) e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} = 1.10 \\ d_N &= \left(1 + \tfrac{RT}{N}\right) e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} = 0.95 \end{aligned}$$

e le probabilità neutrali al rischio

$$q_N = \frac{1 - e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}} = 0.48, \quad 1 - q_N = 0.52.$$

Il valore del premio nel modello CRR è $c_{CRR} = 0.67$ mentre nel modello Black-Scholes è $c_{BS} = 0.68$. I portafogli di replica relativi ai tre sottoalberi sono:

$$C^+ \longrightarrow (C^{++}, C^{+-}): \quad x^* = -9.75, y^* = 1,$$

$$C^- \longrightarrow (C^{+-}, C^{--}): \quad x^* = -2.77, y^* = 0.31,$$

$$C_0 \longrightarrow (C^+, C^-): \quad x^* = -6.16, y^* = 0.68.$$

2. Per $T \to +\infty$ abbiamo

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right) \to +\infty$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(R - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right) \begin{array}{ll} \nearrow & +\infty \ \text{ se } \ r > \sigma^2/2 \\ \to & 0 \ \text{ se } \ r = \sigma^2/2 \\ \searrow & -\infty \ \text{ se } \ r < \sigma^2/2. \end{array}$$

Quindi $N(d_1) \longrightarrow 1$ mentre $N(d_2) \longrightarrow 1, 1/2, 0$ rispettivamente, rimanendo comunque limitato. Dunque

$$c_0 = S_0 N[d_1] - e^{-rT} K N[d_2] \longrightarrow S_0.$$

3. $R(0.5) = 0.0252$, $R(1) = 0.0443$, $R(1.5) = 0.029$. Il prezzo di B_4 è

$$P_{B_4} = 2.25 e^{-R(0.5)0.5} + 102.25 e^{-R(1)} = 100.0419.$$

Il tasso di rendimento interno è quel valore R tale che

$$2.25 e^{-R0.5} + 102.25 e^{-R} = 100.0419.$$

Per determinarlo possiamo in questo caso porre $x = e^{-R/2}$ in modo da poter riscrivere la precedente equazione come

$$2.25x + 102.25x^2 - 100.0419 = 0$$

da cui si ha facilmente, prendendo la sola soluzione positiva

$$x_{1,2} = \frac{-2.25 \pm \sqrt{2.25^2 + 4 \cdot 102.25 \cdot 100.0419}}{2 \cdot 102.25} = 0.9781$$

che implica $R = 0.0443$.

4. Il Var decale al 99% per le posizioni **A** e **B** è rispettivamente

$$Var(A) = V_0(A)\sigma_A z_\alpha \sqrt{10} = 553398,60$$

e

$$Var(A) = V_0(B)\sigma_A z_\alpha \sqrt{10} = 126491,10.$$

Per il portafoglio complessivo è invece

$$Var(A+B) = z_\alpha \sqrt{10} \sqrt{(V_0(A)\sigma_A)^2 + (V_0(B)\sigma_B)^2 + 2\rho V_0(A)V_0(B)\sigma_A\sigma_B} = 637377,44.$$