Capitolo 4

Le obbligazioni

Un'*obbligazione* è un contratto fra due controparti: una, l'emittente (in genere uno Stato, ma anche grandi aziende o istituti di credito), riceve dall'altra, l'acquirente, una certa somma di denaro in cambio della promessa di un futuro flusso di cassa (*cash flow*). Nel nome stesso è sottinteso l'obbligo alla restituzione del prestito. Le regole che disciplinano tempi e modalità dell'emissione, dell'acquisto, dello scambio e della tassazione sui guadagni delle obbligazioni variano da nazione a nazione e non verranno qui esaminate o discusse. Chi acquista oggi un'obbligazione, acquista il diritto di ricevere a certe date future fissate un importo certo. Questo tipo di prodotti vengono pertanto anche chiamati *fixed - income securities*.

Esistono due tipologie principali di obbligazioni nel mercato *fixed income*:

- obbligazioni senza cedole o a sconto, *zero – coupon bonds*,
- obbligazioni con cedole, *coupon (bearing) bonds*.

Le obbligazioni senza cedole promettono al possessore di ricevere ad un certo tempo futuro T, detto *scadenza* o *maturita'*, una somma di denaro F detta *principale* (*principal*) o *valore facciale* (*face value*).

Le obbligazioni con cedole promettono invece il pagamento di un certo numero noto di importi fissi C dette *cedole* (*coupons*) a tempi prefissati fino alla maturita' T in cui si riceve inoltre anche il valore facciale F. Il flusso di cassa promesso all'acquirente è dunque completamente specificato, sia nei tempi che nelle quantità.

Il rendimento di un'obbligazione deriva quindi dagli interessi che l'emittente paga al possessore del titolo sotto forma di cedole e/o del valore facciale.

Esempio 4.1. *Oggi posso comprare un titolo di stato italiano senza cedole (BOT - Buono Ordinario del Tesoro) che mi promette la restituzione di* 100

Rating	Giudizio
AAA	probabilita' di default estremamente basse
AA	probabilita' di default molto basse
A	probabilita' di default basse
BBB	bassa probabilita' di default, possibile deterioramento in circostanze avverse
BB	possibili incertezze nella capacita' di rimborso, specie in circostanze avverse
B	visibili elementi di possibile vulnerabilita'
CCC	vulnerabilita' dipendente da favorevoli condizioni economiche e finanziarie
CC	grande vulnerabilita'
C	e' in atto un'azione di recupero, ma i pagamenti proseguono
D	situazione di mancato pagamento (default)

Tabella 4.1: I ratings di Standard & Poor's

Euro fra 1 anno a fronte di un pagamento attuale di 97.78 *Euro. Il rendimento a scadenza e' dunque* $\frac{100-97.78}{97.78} = 0.0227$*, ovvero* 2.27% *(al lordo delle tasse).*

Le obbligazioni, in teoria, sono considerate investimenti privi di rischio, perché, diversamente da altri, le date e gli importi dei pagamenti futuri sono noti a priori. Ciò non è vero in realtà. Esistono, infatti, diversi tipi di rischio:

1. rischio di fallimento - *risk of default*: l'emittente non effettua completamente i pagamenti promessi. In generale, i titoli emessi hanno un diverso rischio di non essere rimorsati a scadenza: si va da una sostanziale certezza di essere rimorsati per i titoli emessi da Stati dei paesi piu' economicamente sviluppati a probabilita' di rimborso decrescenti per emittenti meno solidi. L'affidabilita' dei titoli quotati nel mercato e' misurata da societa' specializzate, le *agenzie di rating*, che assegnano a ciascun titolo un voto o *rating*. A rating peggiore corrisponde una maggiore probabilita' di default. La classificazione di Standard & Poor's e' riportata in Tabella 1.

   I titoli con rating AAA, AA, A sono caratterizzati da basso rischio e hanno dunque in genere un basso rendimento. Al crescere del rischio aumenta chiaramente il rendimento: si parla in questo caso di obbligazioni di tipo speculativo.

2. rischio di mercato - *market risk*: mentre il rimborso alla maturita' e' fissato ad F, il valore del titolo *prima* della scadenza puo' variare: se ad

esempio i tassi di interesse sul mercato salgono, un titolo che offre un rendimento inferiore al tasso ottenibile necessariamente perde di valore ed il suo prezzo scende. Il rischio di mercato sorge principalmente da movimenti indesiderati nei prezzi e nei tassi, potendo dunque provocare una perdita monetaria. Si può distinguere tra il *rischio assoluto* che misura la perdita in termini monetari della posizione e il *rischio relativo* che indica il mancato guadagno relativamente ad un indice di mercato.

Nel seguito si considereranno obbligazioni con un rischio di fallimento generalmente assunto come trascurabile.

Indicando con $P(t,T)$ il prezzo al tempo t di un'obbligazione con maturita' T, si ha evidentemente che $P(T,T) = F$. Il problema centrale che vogliamo affrontare e' dunque quello di caratterizzare il prezzo $P(t,T)$ per $t < T$ e di studiare dei modelli matematici per la sua dinamica.

4.1 Obbligazioni, rendimenti e la struttura a termine dei tassi

Un'obbligazione senza cedole è un contratto che garantisce al possessore di ricevere al tempo T, detto scadenza o maturità (*maturity*), una certa somma fissata di denaro detta principale o valore facciale. Poniamo

$P(t,T) =$ prezzo al tempo t di uno zero coupon con maturità T,

$P(T,T) = F =$ valore facciale o principale (in genere è $F = 100$Euro).

Si osservi che

$$P(t,T) < P(T,T) = F \quad \forall t \in [0,T]$$

Infatti, pur essendo aleatorio il prezzo nel generico istante t, successivo all'emissione, nessuno sarebbe disposto a spendere più di F per riavere poi tale quantità al tempo T.

In un mercato in cui sono contrattati più bonds, i relativi prezzi non possono essere fissati arbitrariamente, ma sono collegati l'un l'altro. Queste relazioni tra i prezzi devono sottostare ad alcune regole affinché nel mercato non sorgano possibilità di arbitraggio.

Consideriamo dunque il caso di due obbligazioni con scadenze diverse $T^{(1)} < T^{(2)}$. Sicuramente sarà $P^{(1)}(T^{(1)}, T^{(1)}) = P^{(2)}(T^{(2)}, T^{(2)}) = 100$Euro, ma cosa possiamo dire riguardo alla relazione che intercorre fra i loro prezzi nel generico istante t? E a $t = 0$? Una risposta a queste domande è nella seguente:

Proposizione 4.1. *In assenza di arbitraggio, per due obbligazioni senza cedole tali che* $T^{(1)} < T^{(2)}$ *si ha sempre*

$$P^{(1)}(t, T^{(1)}) > P^{(2)}(t, T^{(2)}) \quad \forall \; 0 \leq t \leq T^{(1)} < T^{(2)}. \tag{4.1}$$

In particolare, il prezzo forward $P^{(2)}(t, T^{(1)}, T^{(2)})$*, deve essere:*

$$P^{(2)}(t, T^{(1)}, T^{(2)}) = \frac{P^{(2)}(t, T^{(2)})}{P^{(1)}(t, T^{(1)})}. \tag{4.2}$$

Dimostrazione. Si dimostra la disuguaglianza (4.1) facendo vedere come possano emergere opportunità di arbitraggio qualora non si verifichi con la creazione di un opportuno portafoglio $\mathcal{P}$ composto dai due titoli. Supponiamo, quindi, per assurdo che sia $P^{(1)}(t, T^{(1)}) \leq P^{(2)}(t, T^{(2)})$,.

Al tempo t si vende allo scoperto 1 obbligazione con maturità $T^{(2)}$ e si acquistano

$$\alpha = \frac{P^{(2)}(t, T^{(2)})}{P^{(1)}(t, T^{(1)})} \geq 1$$

obbligazioni con maturità $T^{(1)}$. Il valore del portafoglio è:

$$v_t(\mathcal{P}) = P^{(2)}(t, T^{(2)}) - \alpha P^{(1)}(t, T^{(1)}) \geq 0.$$

Al tempo $T^{(1)}$ si riceve il valore facciale dell'obbligazione con maturità $T^{(1)}$ e si acquista 1 obbligazione con maturità $T^{(2)}$. Il valore del portafoglio è:

$$v_{T^{(1)}}(\mathcal{P}) = -P^{(2)}(T^{(1)}, T^{(2)}) + \alpha P^{(1)}(T^{(1)}, T^{(1)}) = -P^{(2)}(T^{(1)}, T^{(2)}) + \alpha F > 0$$

poichè $\alpha \geq 1$ e $P^{(2)}(T^{(1)}, T^{(2)}) \leq F$. Infine, a $T^{(2)}$, si riceve il valore facciale delle obbligazioni con maturità $T^{(2)}$ e si chiude la posizione della vendita allo scoperto pagando $P^{(2)}(T^{(2)}, T^{(2)}) = 100$. Il valore del portafoglio è dunque

$$v_{T^{(2)}}(\mathcal{P}) = P^{(2)}(T^{(2)}, T^{(2)}) - P^{(2)}(T^{(2)}, T^{(2)}) = 0.$$

In questo modo si e' ottenuto un arbitraggio, che conclude la proposizione. □

4.1.1 Rendimento e la struttura a termine dei tassi.

L'acquisto di un'obbligazione senza cedole, a fronte di un pagamento iniziale pari a $P(0, T)$, assicura un'entrata pari a $P(T, T)$ al tempo T . Questo vuol dire che il valore futuro, alla scadenza T, della somma di denaro con la quale si è acquistata l'obbligazione è pari al valore facciale. Indicando con R il rendimento annuale nel periodo $[t, T]$, si ha che

$$FV(P(t,T)) = P(t,T)e^{R\cdot(T-t)} = F,$$

avendo usato la capitalizzazione in tempo continuo. Con capitalizzazioni in tempo discreto si ha invece

$$FV(P(t,T)) = P(t,T)(1 + R(T-t)) = F.$$

Ponendo per semplicita' di notazione $F = 1$Euro, segue dunque che

$$P(t,T) = e^{-R\cdot(T-t)} \text{ (cap. continua)}, P(t,T) = \frac{1}{1+R(T-t)} \text{ (cap. discreta)}. \tag{4.3}$$

Da queste equazioni si ricava il valore di R, che dipende dal momento t in cui lo si calcola e dalla maturità T dell'obbligazione. Tale valore è detto *rendimento interno* o *rendimento a maturità* (*yield to maturity*) dell'obbligazione. Il termine al denominatore $T-t$ è detto *vita residua* (*time to maturity*) dell'obbligazione:

$$R = -\frac{\log P(t,T)}{T-t}, \quad R = \frac{1-P(t,T)}{P(t,T)(T-t)}. \tag{4.4}$$

Se si prendono i prezzi al tempo t (ad esempio leggendoli su un quotidiano) di tutte le obbligazioni senza cedole presenti al momento sul mercato, si possono ottenere i corrispondenti valori di R e graficarli in funzione di T, ottenendo così la cosiddetta *curva dei rendimenti per scadenza* o *yield curve*.

In generale dunque possiamo assumere che il rendimento su base annua nel periodo $[t, T]$ sia una funzione $R(t, T)$ delle variabili t e T, legato al prezzo dello zero-coupon dalle relazioni

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}, \quad P(t,T) = \frac{1}{1+R(t,T)(T-t)}.$$

La funzione

$$R(t,T) = -\frac{\log P(t,T)}{T-t} \tag{4.5}$$

è anche definita *tasso spot composto continuamente*.

Introduciamo ora altre importanti quantità. Dalla (4.1) si ottiene

$$\frac{P^{(1)}(t,T^{(1)})}{P^{(2)}(t,T^{(2)})} > 1 \quad \forall t < T^{(1)} < T^{(2)}$$

da cui

$$\log \frac{P^{(1)}(t, T^{(1)})}{P^{(2)}(t, T^{(2)})} = \log P^{(1)}(t, T^{(1)}) - \log P^{(2)}(t, T^{(2)}) > 0.$$

Definiamo il *tasso forward* relativo all'intervallo $[T^{(1)}, T^{(2)}]$ come

$$R(t, T^{(1)}, T^{(2)}) \stackrel{def}{=} -\frac{\log P^{(1)}(t, T^{(1)}) - \log P^{(2)}(t, T^{(2)})}{T^{(1)} - T^{(2)}} \qquad (4.6)$$

Il suo significato finanziario è quello di tasso di rendimento per uno zero coupon bond emesso a $T^{(1)}$ con scadenza $T^{(2)}$ visto dal tempo t.

Osserviamo che il tasso forward $R(t, T^{(1)}, T^{(2)})$ stabilisce un legame tra i prezzi di zero-coupons con scadenze differenti:

$$P(t, T^{(1)}) = P(t, T^{(2)}) e^{-R(t, T^{(1)}, T^{(2)})(T^{(2)} - T^{(1)})}.$$

Passando al limite per $T^{(2)} \to T^{(1)}$ e assumendo la differenziabilità di $P(t, \cdot)$ per ogni t, si ottiene:

$$f(t, T^{(1)}) \stackrel{def}{=} \lim_{T^{(2)} \to T^{(1)}} R(t, T^{(1)}, T^{(2)}) = -\frac{\partial \log P(t, T^{(1)})}{\partial T} \qquad (4.7)$$

che è detto *tasso forward istantaneo*. Il suo significato è quello di tasso di rendimento istantaneo per uno zero coupon bond emesso a $T^{(1)}$ con vita residua infinitesima. Ciò implica al contrario che

$$P(t, T) = e^{\int_t^T f(t,s) ds}. \qquad (4.8)$$

Infine, dalla (4.5), passando al limite per $T^{(1)} \to t$ si ottiene

$$r = r(t) \stackrel{def}{=} \lim_{T^{(1)} \to t} R(t, T^{(1)}) \qquad (4.9)$$

detto *tasso a breve* (*short rate*). Inoltre, dato che $P(t, T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$, si ha

$$R(t, T) = \frac{1}{T - t} \int_t^T f(t, s) ds$$

e dunque

$$r(t) = \lim_{T \to t} R(t, T) = \lim_{T \to t} \frac{1}{T - t} \int_t^T f(t, s) ds = f(t, t). \qquad (4.10)$$

Per un fissato tempo $t < T$, le quantità $P(t, T)$, $R(t, T)$ e $f(t, T)$, viste come funzioni della maturità, si dicono *strutture a termine dei tassi d'interesse* (*term structure of interest rates*) e la conoscenza di una di queste funzioni permette di ricavare le altre.

4.1.2 Obbligazioni con cedole

In questo tipo di obbligazioni l'acquirente, oltre a ricevere al tempo T il valore facciale, ha diritto a ricevere dei pagamenti, le cedole C, di entità ed a scadenze prestabilite nel contratto (in genere sono pagate semestralmente o annualmente). Per questo motivo non è più valida la Proposizione (4.1): infatti il prezzo può salire oltre il valore facciale, per tenere in considerazione il flusso di cassa positivo generato, e la (4.3) deve essere modificata ad includere anche le cedole. Definiamo il flusso di cassa associato all'obbligazione nel modo seguente: siano $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ le date di pagamento delle cedole con $t_n = T$, allora

Definizione 4.1. Il *vettore flusso di cassa* Φ=$(\phi_1, \ \ldots, \ \phi_n)$, per un'obbligazione con maturità T e cedole C, è un vettore di $\mathbb{R}^n_+$ tale che l'i-esima componente ϕ_i rappresenta il pagamento che si riceve al tempo t_i

$$\phi_i = \begin{cases} C & \text{se } t_i \text{ corrisponde ad una scadenza cedolare} \\ \\ C+F & \text{se } t_i \text{ corrisponde alla maturità } t_n \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il flusso di cassa di un coupon bond risulta dunque lo stesso di un portafoglio di $n+1$ zero-coupon con scadenze $t_1, \ldots, t_n$ e valori nominali C per $i = 1, \ldots, n-1$ e $C+F$ per $i = n$, i cui prezzo sono

$$P_i(t, t_i) = \phi_i e^{-R(t,t_i)(t_i - t)}, i = 1, \ldots, n.$$

Indicando con:

$P_C(t, T)$=prezzo al tempo t di un'obbligazione con maturità T (si pone il simbolo C a pedice per indicare che l'obbligazione paga delle cedole);

C=valore della cedola scritto come percentuale del principale;

t_i=tempo in cui è pagata la cedola i-esima;

t_n=T, maturità;

$PV(\Phi)$ = valore attualizzato del flusso di cassa Φ;

in assenza di opportunità di arbitraggio, i valori del coupon bond e del portafoglio di zero-coupons devono essere uguali: dunque si ha (cap. continua)

$$P_C(t, T) = PV(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i e^{-R(t,t_i)(t_i - t)} =$$

$$= e^{-R(t,T)(T-t)} + \sum_{i=1}^{n} C e^{-R(t,t_i)(t_i-t)} \tag{4.11}$$

oppure (cap. discreta)

$$P_C(t,T) = PV(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \frac{1}{(1+R(t,t_i)(t_i-t))} =$$

$$\frac{1}{(1+R(t,T)(T-t))} + \sum_{i=1}^{n} C \frac{1}{(1+R(t,t_i)(t_i-t))}. \tag{4.12}$$

Da un punto di vista modellistico è dunque sufficiente specificare i prezzi degli zero-coupon, o la yield curve, per ricavare poi i valori dei coupon bond tramite le (4.11 e 4.12).

Esempio 4.2. *Si consideri la seguente struttura a termine:*

T	0.5	1	1.5	2
$R(0,T)$	1.8%	2.4%	2.8%	3%

Il valore di un coupon bond con scadenza $T = 2$*, cedole (annuale)* $C = 4.5\%$*, pagamenti semestrali è* $P_C(0,2) = 102.879$*.*

Nella pratica si pone tuttavia il problema inverso di *stimare* la curva dei rendimenti $R(t,T)$ a partire dai prezzi di mercato (le osservazioni) dei bond quotati per un ampio range di maturità. Sfortunatamente i zero-coupon hanno maturità che in generale arrivano ad un anno e dunque per ottenere informazioni sulla curva dei rendimenti per scadenze più lunghe (si può arrivare fino a 30 anni) occorre utilizzare anche i prezzi osservati dei coupon bond che pero' sono legati in modo *non lineare* a $R(t,T)$. Vedremo nel paragrafo seguente una tecnica di uso comune per la stima della yield curve.

Se si attualizzano tutti i pagamenti cedolari allo stesso tasso $R(t,t_i) \equiv R \ \forall i$, otteniamo le equazioni non lineari in R

$$P_C(t,T) = e^{-R\cdot(T-t)} + \sum_{i=1}^{n} C e^{-R\cdot(t_i-t)},$$

oppure, assumendo che il tasso discreto R sia relativo all'intervallo di tempo tra due pagamenti cedolari consecutivi $[t_i, t_{i+1}]$

$$P_C(t,T) = \frac{1}{(1+R)^n} + \sum_{i=1}^{n} C \frac{1}{(1+R)^i}.$$

In generale non e' possibile risolvere analiticamente tali equazioni, ma si deve ricorrere a metodi di approssimazione numerica (p.e. il metodo di Newton–Rapson) per determinare il valore R, che è definito come per gli zero coupon bond *tasso di rendimento interno*.

4.1.3 Duration e duration modificata.

Consideriamo il prezzo di un'obbligazione con coupon in funzione del tasso di rendimento interno R:

$$P_C(t,T) = Fe^{-R\cdot(T-t)} + \sum_{i=1}^{n} Ce^{-R\cdot(t_i-t)}.$$

Derivando rispetto alla variabile R otteniamo

$$-\frac{\partial}{\partial R}P_C(t,T) = (T-t)Fe^{-R\cdot(T-t)} + \sum_{i=1}^{n} C(t_i-t)e^{-R\cdot(t_i-t)}$$

e dividendo per $P_C(t,T) > 0$ possiamo definire la quantità

$$D(t,T) = -\frac{1}{P_C(t,T)}\frac{\partial}{\partial R}P_C(t,T) = (T-t)\frac{Fe^{-R\cdot(T-t)}}{P_C(t,T)} + \sum_{i=1}^{n}(t_i-t)\frac{Ce^{-R\cdot(t_i-t)}}{P_C(t,T)} \tag{4.13}$$

che viene chiamata *duration*. Osserviamo che D ha la dimensione di un tempo e che per uno zero-coupon si ha

$$D(0,T) = T\frac{Fe^{-R\cdot T}}{P(0,T)} = T.$$

La duration D è dunque una media ponderata dei tempi di pagamento t_i con pesi pari al rapporto tra il valore attuale dell'i-esimo pagamento ed il valore attuale di tutto il flusso di cassa (ovvero il prezzo dell'obbligazione). La somma dei pesi è pari ad 1.

Dalla (4.13) si ha

$$\frac{\partial}{\partial R}P_C(t,T) = -D(t,T)P_C(t,T);$$

in prima approssimazione possiamo quindi affermare che il tasso di variazione del prezzo del titolo, conseguente ad una piccola variazione del rendimento, è pari al prodotto della duration cmbiata di segno per la variazione del rendimento,

$$\frac{\Delta P_C(t,T)}{P_C(t,T)} \approx -D(t,T)\Delta R$$

dove $\Delta P_C(t,T)$ rappresenta il rapporto incrementale del prezzo rispetto alla variabile rendimento R.

Assumendo una composizione periodale degli interessi si può facilmente dimostrare che se R è il rendimento composto annualmente, la relazione precedente diventa

$$\frac{\Delta P_C(t,T)}{P_C(t,T)} \approx -\frac{D(t,T)\Delta R}{1+R}$$

e più in generale, se la composizione di R è su m periodi,

$$\frac{\Delta P_C(t,T)}{P_C(t,T)} \approx -\frac{D(t,T)\Delta R}{1+R/m}.$$

La quantità

$$D^*(t,T) = \frac{D(t,T)}{1+R/m}$$

è chiamata a volte *duration modificata* (*modified duration*).

La duration è una misura ampiamente utilizzata per realizzare strategie di copertura in portafogli obbligazionari.

4.1.4 La determinazione della struttura a termine dei tassi d'interesse: il metodo bootstrap.

Con la (4.3) si è visto come si esprime il prezzo di un'obbligazione senza cedole in funzione del valore facciale quando quest'ultimo è pari a 1Euro. Il termine a secondo membro dell'equazione è un fattore con cui si sconta il valore facciale per ottenere il prezzo del bond e proprio per questo è detto fattore di sconto (*discount factor*) al tempo t per la scadenza T : $d(t,T)$. Si avrà, allora, dalla (4.3)

$$P(t,T) = d(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

e per un'obbligazione con cedole, dalla (4.11),

$$P_C(t,T) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i d(t,t_i)$$

dove $t_1,\ldots,t_n$ sono le scadenze cedolari.

Con la Proposizione 4.1 si è visto quale relazione deve intercorrere fra i prezzi di due bond con scadenze diverse per evitare l'insorgere di opportunità di arbitraggio. Da questa relazione segue che la funzione $d(t,T)$ deve essere non crescente. Dunque per un generico insieme di tempi di pagamento cedolari $t_0,\ldots,t_n$, con $t_0 = t$ e $t_n = T$, deve essere:

$$d(t,t_0)=1>d(t,t_1)>\ldots>d(t,t_n)>0. \tag{4.14}$$

Uno dei principali problemi nei mercati dei tassi di interesse consiste nel ricavare la struttura a termine dei tassi *implicata* dai prezzi osservati dei bond. Poichè il momento dell'osservazione t è fissato, ometteremo nel seguito la dipendenza delle funzioni considerate dal tempo t che possiamo assumere nullo, $t=0$: l'unica variabile di interesse è dunque la scadenza. Supponiamo di avere i prezzi di N obbligazioni, $P_1,\ldots,P_N$, che ordiniamo per maturità crescenti: ognuna di queste è caratterizzata da una cedola $C_i, i=1,\ldots N$ (per uno zero-coupon assumiamo che $C=0$) e da un insieme di scadenze (i temi di pagamento delle cedole) $t_1^{(i)},\ldots,t_{n_i}^{(i)}$, dove $t_k^{(i)}$ è il k-esimo tempo di pagamento dell'i-esima obbligazione. Per semplicità di notazione, possiamo ordinare tutte queste scadenze in senso crescente, ottenendo un unico insieme di tempi $t_1,\ldots,t_m$ (scartando ovviamente i "doppioni". Il nostro obiettivo è di determinare i fattori di sconto $d(t_j)$ dai prezzi osservati, in virtù della (4.11): si tratta dunque di risolvere il problema lineare

$$\underline{P}=\begin{pmatrix} P_1\\ P_2\\ \vdots\\ P_N\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} d(t_1)\\ d(t_2)\\ \vdots\\ d(t_m)\end{pmatrix}$$

dove C è una matrice $N\times m$ le cui righe sono i flussi di cassa delle obbligazioni considerate, $c_{ij}=\phi_j^{(i)}$:

$$C=\begin{pmatrix} \phi_1^{(1)} & \phi_2^{(1)} & \cdots & \phi_{n_1}^{(1)}\\ \phi_1^{(2)} & \phi_2^{(2)} & \cdots & \phi_{n_2}^{(2)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \phi_1^{(N)} & \phi_2^{(N)} & \cdots & \phi_{n_N}^{(N)}\end{pmatrix}$$

ed ha una struttura "quasi" triangolare inferiore. In generale dunque l'esistenza ed unicità della soluzione di tale sistema dipende dal numero di equazioni N e dal numero di incognite m: se si considerano tutte le obbligazioni quotate giornalmente sul mercato dei titoli di stato il numero di incognite è generalmente molto maggiore del numero di equazioni, $m\gg N$. Si cerca quindi di ovviare a tale problema utilizzando varie tecniche. Uno dei metodi certamente più utilizzati è il cosiddetto *metodo bootstrap* che consiste nel determinare un sottoinsieme delle N obbligazioni con la seguente struttura: ogni tempo di pagamento cedolare di un'obbligazione corrisponde alla scadenza di un'altra (unica) obbligazione del sottoinsieme. La corrispondente matrice $\tilde{C}$ diventa quindi triangolare inferiore, con elementi diagonali $c_{ii} \neq 0$ ed il sistema lineare così ottenuto è facilmente risolvibile (backward substitution):

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \phi_1^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \phi_1^{(2)} & \phi_2^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1^{(N_k)} & \phi_2^{(N_k)} & \cdots & \phi_{n_{N_k}}^{(N_k)} \end{pmatrix}.$$

I valori così ottenuti dei fattori di sconto possono quindi essere interpolati linearmente per ottenere la (stima della) funzione di sconto $d(T)$ e, con le opportune trasformazioni, la curva dei rendimenti e/o del tasso forward. Il principale svantaggio di tale tecnica sta nel fatto che sottoinsiemi di obbligazioni con tali caratteristiche non si riescono generalmente a costruire per scadenze medio - lunghe.

Esempio 4.3. *Si considerino i seguenti dati di mercato:*

	Cedole	*Prezzi*	*Scadenze*
B_1	0	99	0.5
B_2	3.5%	101	0.8
B_3	8%	105	1
B_4	4%	102	1.5

Cerchiamo di determinare con il metodo bootstrap la curva dei rendimenti. I tempi di pagamento sono $t_1 = 0.3$, $t_2 = 0.5$, $t_3 = 0.8$, $t_4 = 1$ *e* $t_5 = 1.5$ *(in anni) e dunque le incognite sono* $d(t_i)$, $i = 1, \ldots, 5$. *Il sistema lineare corrispondente è quindi*

$$\begin{pmatrix} 99 \\ 101 \\ 105 \\ 102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 1.75 & 0 & 101.75 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 104 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 102 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(0.3) \\ d(0.5) \\ d(0.8) \\ d(1) \\ d(1.5) \end{pmatrix}.$$

Occorre ridurre il sistema "eliminando" il secondo coupon bond in modo da ottenere un sistema di 3 *equazioni nelle* 3 *incognite* $d(0.5)$, $d(1)$ *e* $d(1.5)$*:*

$$\begin{pmatrix} 99 \\ 105 \\ 102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 4 & 104 & 0 \\ 2 & 2 & 102 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(0.5) \\ d(1) \\ d(1.5) \end{pmatrix},$$

la cui soluzione è

$$d(0.5) = 0.99, \quad d(1) = 0.971, \quad d(1.5) = 0.966$$

da cui segue la curva dei rendimenti

$$R(0, 0.5) = 0.020, \quad R(0, 1) = 0.029, \quad R(0, 1.5) = 0.023.$$

4.2 Modelli per il prezzo delle obbligazioni

Molti modelli stocastici sono stati sviluppati per descrivere l'andamento dei prezzi. Si può in generale assumere che il prezzo di un bond dipende dai tempi t, T e da una variabile aleatoria X_t, scalare o vettoriale:

$$P \equiv P(t, T, X_t) \tag{4.15}$$

A seconda del tipo di variabile aleatoria X_t si hanno diversi tipi di modello. Una delle classi di modelli maggiormente utilizzata consiste nello scegliere X_t come una variabile aleatoria scalare che rappresenta l'andamento nel tempo del tasso a breve $r(t)$ – *short rate models*. Nel seguito descriveremo due tra i più famosi modelli di struttura a termine: il modello di Merton ed il modello di Vasicek.

Un'altra importante classe di modelli utilizza il tasso forward $f(t, T)$ come variabile di stato X_t: tali modelli prendono il nome di modelli HJM, (Heath, Jarrow e Morton - ,).

4.2.1 Modello di Merton (1973)

In questo modello si ipotizza che $r_t | r_s \sim N(r_s + \mu(t-s), \sigma^2(t-s))$ con $s < t$. Poiché r_t è una variabile aleatoria condizionatamente gaussiana, si osserva immediatamente che il tasso a breve può prendere valori negativi con probabilità positiva. E' questo il principale limite del modello di Merton, che tuttavia è stato il precursore dei modelli di struttura a termine che si basano sul tasso a breve. Per trovare la forma che la funzione $P(t, T, r_t)$ assume in questo caso si deve risolvere la seguente equazione differenziale alle derivate parziali (EDP) di tipo parabolico, la quale è stata derivata partendo da ipotesi di assenza di arbitraggio (si veda ad esempio Björk T. – *Arbitrage Theory in continuous time*, Oxford University Press):

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + (\mu - \lambda\sigma)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = rP \\ \\ P(T, T) = 1 \quad \text{(condizione al bordo, a scadenza o terminale)} \end{cases} \tag{4.16}$$

dove σ e μ sono i parametri del modello. Il parametro λ, che è interpretato come prezzo di mercato del rischio (*market price of risk*), è invece libero perché si può dimostrare che, in assenza di arbitraggio, l'equazione del prezzo deve soddisfare l'EDP per ogni suo valore. Questi valori devono in generale essere stimati dai prezzi di mercato osservati.

Cerchiamo ora di risolvere la PDE (4.16). Si consideri una soluzione del tipo

$$F(t,T,r) = e^{-(T-t)r+b(T-t)}$$

dove $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione derivabile, $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Dalla condizione terminale deve essere

$$1 = P(T,T) = F(T,T,r) = e^{b(0)} \Longleftrightarrow b(0) = 0.$$

Inoltre, ponendo $\tau = T - t$, la PDE diventa

$$\begin{cases} -\frac{\partial F}{\partial \tau} + (\mu - \lambda\sigma)\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = rF \\ \\ F(0,0,r) = 1 \end{cases}$$

con $F(\tau, r) = e^{-\tau r + b(\tau)}$. Derivando ($b' = \frac{db}{dt}$) e sostituendo nella PDE otteniamo

$$-F(-r+b') + (\mu - \lambda\sigma)F(-\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2 F\tau^2 = rF$$

da cui segue che la funzione b deve soddisfare

$$\begin{cases} b'(\tau) & = & -\tau(\mu - \lambda\sigma) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau^2 \\ b(0) & = & 0 \end{cases}$$

ovvero

$$b(\tau) = \int_0^\tau b'(s)ds = -(\mu - \lambda\sigma)\frac{\tau^2}{2} + \sigma^2\frac{\tau^3}{6}.$$

Quindi

$$P(t,T,r) = e^{-(T-t)\cdot r - (\mu-\lambda\sigma)\frac{(T-t)^2}{2} + \sigma^2\frac{(T-t)^3}{6}} \tag{4.17}$$

Infine, riprendendo la (4.4) e sostituendo in essa l'espressione (4.17) per $P(t,T)$, si ha

$$R(t,T) = r + \frac{\mu - \lambda\sigma}{2}(T-t) - \frac{\sigma^2}{6}(T-t)^2 \tag{4.18}$$

Se in questa equazione si fissa t e si fa variare T, si ottiene la struttura a termine indotta dal modello di Merton, che è una parabola con concavità rivolta verso il basso e massimo in $(R(t,T^*), T^* = \frac{3}{2}\frac{\mu-\lambda\sigma}{\sigma^2})$. Si osservi che la struttura a termine ha concavità verso il basso e, dunque, ad un certo punto incontrerà l'asse delle ascisse prendendo valori negativi.

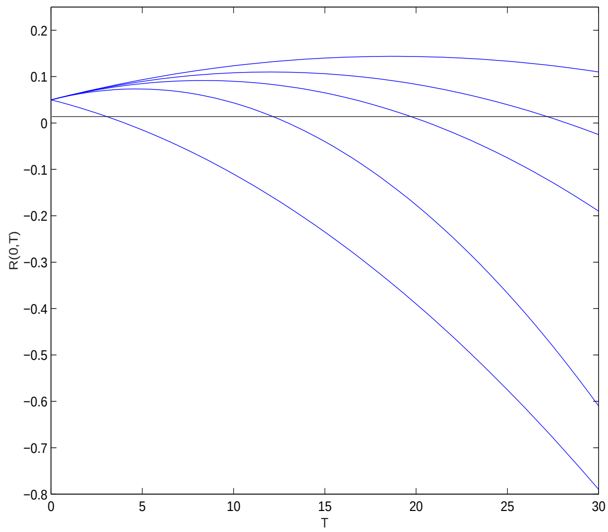

Figura 4.1: Le curve dei rendimenti $R(0,T)$ del modello di Merton per vari valori dei parametri μ, λ e σ^2.

4.2.2 Modello di Vasicek (1977)

In questo modello si prende $r_t|r_s \sim N(\theta + (r_s - \theta)e^{-k(t-s)}, \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2k(t-s)}))$ con $s < t$, $\theta > 0$ e $\sigma > 0$. La dinamica è quindi sempre gaussiana, ma mentre nel modello di Merton il valore atteso e la varianza (condizionate) sono funzioni lineari del tempo t, in questo caso per $t \to +\infty$ tali valori sono rispettivamente θ e $\sigma^2/2k$. In questo modello quindi lo short rate "tende" a stare vicino al valore θ: tale proprietà è denominata generalmente come *mean reversion*.

In assenza di oppportunità di arbitraggi, è possibile dimostrare che la funzione prezzo $F(t,T,r) = P(t,T)$ di uno zero-coupon bond deve soddisfare per ogni valore del parametro λ (prezzo di mercato del rischio) la PDE

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} + (k\theta - kr - \lambda\sigma)\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = rF \\ \\ F(T,T,r) = 1. \end{cases} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad (4.19)$$

Come per il modello di Merton possiamo risolvere l'equazione ponendo $F(t,T,r) = e^{a(T-t)\cdot r + b(T-t)}$ con $a, b \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Imponendo la condizione finale si ottiene

$$1 = F(T,T,r) = e^{a(0)\cdot r + b(0)} \Longleftrightarrow a(0) = b(0) = 0.$$

Inoltre, ponendo $\tau = T - t$, derivando e sostituendo nella PDE si ha

$$-ra'F - b'F + (k\theta - kr - \lambda\sigma)aF + \frac{1}{2}\sigma^2 a^2 F = rF$$

che possiamo riscrivere come

$$r(-a' - ka - 1) - b' + (k\theta - \lambda\sigma)a + \frac{1}{2}\sigma^2 a^2 = 0$$

dove $a' = \frac{da}{d\tau}$ e $b' = \frac{db}{d\tau}$. Questa equazione deve valere per ogni t, T e r. Fissando quindi arbitrariamente t e T, l'equazione deve essere soddisfatta per ogni valore di r e dunque il coefficiente di r deve essere nullo

$$a' + ka + 1 = 0$$

e conseguentemente anche il termine rimanente deve annullarsi

$$-b' + (k\theta - \lambda\sigma)a + \frac{1}{2}\sigma^2 a^2 = 0.$$

Abbiamo ottenuto una coppia di equazioni differenziali ordinarie (ODE) per le nostre funzioni incognite a e b:

$$\begin{cases} a' + ka & = & -1 \\ a(0) & = & 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} b' & = & (k\theta - \lambda\sigma)a + \frac{1}{2}\sigma^2 a^2 \\ b(0) & = & 0 \end{cases}$$

La prima ODE è lineare e la sua soluzione è

$$a(\tau) = \frac{1}{k}(e^{-k\tau} - 1);$$

integrando la seconda ed inserendo la funzione a appena trovata si ottiene

$$b(\tau) = (k\theta - \lambda\sigma)\int_0^\tau a(s)ds + \frac{1}{2}\sigma^2\int_0^\tau a^2(s)ds =$$

$$\frac{\sigma^2}{4k^3}(1 - e^{-2k\tau}) + \frac{1}{k}(\theta - \frac{\lambda\sigma}{k} - \frac{\sigma^2}{k^2})(1 - e^{-k\tau}) - (\theta - \frac{\lambda\sigma}{k} - \frac{\sigma^2}{k^2})\tau$$

Infine, il prezzo $P(t, T) = F(t, T, r) = e^{a(T-t)+rb(T-t)}$ di uno zero-coupon bond nel modello di Vasicek è

$$P(t,T) = e^{\frac{e^{-k(T-t)}-1}{k}\cdot r + \frac{\sigma^2}{4k^3}(1-e^{-2k(T-t)}) + \frac{1}{k}(\theta - \frac{\lambda\sigma}{k} - \frac{\sigma^2}{k^2})(1-e^{-k(T-t)}) - (\theta - \frac{\lambda\sigma}{k} - \frac{\sigma^2}{2k^2})(T-t)} \tag{4.20}$$

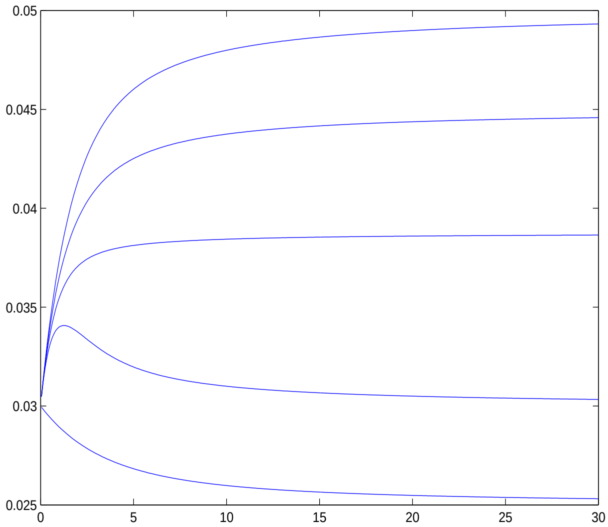

Figura 4.2: Le curve dei rendimenti $R(0,T)$ del modello di Vasicek per vari valori dei parametri k, θ, λ e σ^2.

che implica di conseguenza una struttura a termine dei rendimenti:

$$\begin{aligned} R(t,T) = \quad & -\tfrac{e^{-k(T-t)}-1}{k(T-t)} \cdot r - \tfrac{\sigma^2}{4k^3(T-t)}(1-e^{-2k(T-t)})+ \\ & -\tfrac{1}{k}(\theta - \tfrac{\lambda\sigma}{k} - \tfrac{\sigma^2}{k^2})\tfrac{1-e^{-k(T-t)}}{T-t} + (\theta - \tfrac{\lambda\sigma}{k(T-t)} - \tfrac{\sigma^2}{2k^2}) \end{aligned} \tag{4.21}$$

Al variare dei quattro parametri θ, σ, λ e k si osservano tre diversi andamenti tipici per la curva dei rendimenti (vedi Figura 4.2). In ogni caso per scadenze lunghe, la curva dei rendimenti tende ad assestarsi intorno al valore

$$\theta - \frac{\lambda\sigma}{k} - \frac{\sigma^2}{2k^2} = \lim_{T \longrightarrow +\infty} R(t,T)$$

Si osservi, infine, che i modelli esposti si dicono anche *modelli a struttura affine*, perché $\log P(t,T) = a(T-t) \cdot r_t + b(T-t)$ che costituisce appunto una funzione affine del tasso a breve r_t.