Università degli Studi - Roma 3

Corso di Laurea in Matematica

Appunti per il Corso

METODI E MODELLI MATEMATICI DEI MERCATI FINANZIARI

Alessandro Ramponi

ANNO ACCADEMICO 2004 - 2005

Capitolo 1

Concetti base della matematica finanziaria

In questo capitolo presenteremo alcune nozioni elementari della matematica finanziaria. Introdurremo in particolare la composizione periodale e continua degli interessi, il valore presente e futuro di un flusso di cassa ed alcune importanti strategie con cui si opera nei mercati finanziari.

1.1 Interessi

Il più semplice modo di variazione nel tempo del valore di una quantità monetaria disponibile oggi a seguito di un'operazione finanziaria è descritto dalle leggi di composizione degli interessi. Possiamo immaginare di avere a disposizione oggi una quantità di denaro X_0 e di investirla, p.e. depositandola su un conto corrente bancario (che supporremo privo di spese!) o prestandola allo Stato od a qualche azienda privata (si parla in questo caso di Obbligazioni), con la certezza di riavere alla fine del periodo considerato, che indichiamo con $T > 0$, il capitale iniziale più una certa quantità, $X_T = X_0 + I$. In generale si può assumere che la quantità I sia una percentuale del valore iniziale, ovvero $I = rX_0$ dove $r \in (0, 1)$. A tale valore ci si riferisce genericamente come *tasso di interesse*.

1.1.1 Interesse semplice

Si consideri il caso di un orizzonte temporale di un anno, ovvero $T = 1$. Supponiamo di depositare oggi un capitale su un conto corrente (c/c) che paga un certo interesse annuo r:

$$\begin{aligned} t &= 0 \quad \text{(oggi)} \\ X_0 &= 100 \quad \text{(capitale iniziale)} \\ r &= 10\% \quad \text{(interesse annuo - tasso).} \end{aligned}$$

Allora un anno dopo:

$$\begin{aligned} t &= 1 \quad \text{(un anno dopo)} \\ \tilde{X}_1 &= X_0 + rX_0 \quad \text{(nuovo capitale)} \\ &= 100 + \tfrac{10}{100}100 = 110. \end{aligned}$$

Se indichiamo con r il tasso di interesse su base annua, supponendo che rimanga invariato nel corso del tempo considerato, l'interesse si dice *semplice* se nell'anno successivo l'interesse che si matura è sul capitale iniziale depositato, e non su quanto guadagnato (supponendo di non fare prelievi):

$$\begin{aligned} t &= 2 \quad \text{(due anni dopo)} \\ \tilde{X}_2 &= \tilde{X}_1 + rX_0 \\ &= 110 + \tfrac{10}{100}100 = 120 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{X}_2 = X_0(1 + 2r).$$

Dunque, dopo n anni

$$\tilde{X}_n = X_0(1 + nr)$$

con

$$\begin{aligned} X_0 &= \quad \text{capitale iniziale} \\ \tilde{X}_n &= \quad \text{capitale finale dopo } n \text{ anni} \end{aligned}$$

Quindi l'interesse semplice aggiunge di anno in anno gli interessi sempre e solo sul capitale iniziale.

1.1.2 Interesse composto periodicamente

L'*interesse composto* è l'interesse che matura anche su quanto guadagnato di anno in anno. Definendo r il tasso di interesse su base annua e supponendo che rimanga invariato per tutto il tempo considerato, è chiaro che non c'è differenza tra l'interesse semplice e l'interesse composto solo nel primo anno:

$$\begin{aligned} t &= 0 \quad \text{(oggi)} \\ X_0 &= 100 \quad \text{(capitale iniziale)} \\ r &= 10\% \quad \text{(interesse annuo - tasso)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= 1 \quad \text{(un anno dopo)} \\ X_1 &= X_0 + rX_0 \quad \text{(nuovo capitale)} \\ &= 100 + \tfrac{10}{100}100 = 110. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= 2 \quad \text{(due anni dopo)} \\ X_2 &= X_1 + rX_1 \quad \text{(nuovo capitale)} \\ &= 110 + \tfrac{10}{100}110 = 121. \end{aligned}$$

(quindi dopo il secondo anno abbiamo con l'interesse composto 1 euro in più rispetto all'interesse semplice).

Cerchiamo una formula generale:

$$\begin{aligned} X_0 &= \quad \text{capitale iniziale} \\ r &= \quad \text{interesse annuo - tasso} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= 1 \quad \text{anno} \\ X_1 &= X_0 + rX_0 = X_0(1+r) \\ \\ t &= 2 \quad \text{anni} \\ X_1 &= X_1 + rX_1 = X_1(1+r) = X_0(1+r)^2 \\ &\vdots \\ t &= n \quad \text{anni} \\ X_n &= X_{n-1} + rX_{n-1} = X_{n-1}(1+r) = X_0(1+r)^n \end{aligned}$$

Dunque, dopo n anni

$$X_n = X_0(1+r)^n$$

con

$$\begin{aligned} X_0 &= \quad \text{capitale iniziale} \\ X_n &= \quad \text{capitale finale dopo } n \text{ anni} \end{aligned}$$

Finora l'interesse era composto annualmente. Chiediamo ora invece alla banca di pagarmi sempre il 10% di interesse annuo, ma composto semestralmente:

$$\begin{aligned} t &= 0 \quad \text{(oggi)} \\ X_0 &= 100 \quad \text{(capitale iniziale)} \\ r &= 10\% \quad \text{(interesse annuo - tasso)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= 1 \quad \text{(semestre dopo)} \\ \\ X_1 &= X_0 + \tfrac{r}{2}X_0 = X_0(1+\tfrac{r}{2}) \\ \\ &= 100 + \tfrac{10}{100}\tfrac{1}{2}100 = 105. \end{aligned}$$

Alla fine del primo anno (e quindi del secondo semestre) riapplico l'interesse composto semestralmente sul capitale finora maturato:

$$\begin{aligned} t &= 2 \text{ semestri} = \text{ un anno dopo} \\ X_2 &= X_1 + \tfrac{r}{2}X_1 = X_0(1+\tfrac{r}{2})^2 \\ &= 100(1+\tfrac{10}{100}\tfrac{1}{2})^2 = 100(1+0.05)^2 = 110.25. \end{aligned}$$

Si osservi che la composizione semestrale degli interessi ha prodotto dopo un anno un capitale maggiore che con la composizione annuale: infatti

$$(1+\frac{r}{2})^2 > (1+r).$$

Dunque, dopo n anni, cioè $h = 2n$ semestri

$$X_n = X_0(1+\frac{r}{2})^h = X_0(1+\frac{r}{2})^{2n}.$$

Quindi componendo semestralmente guadagno di più rispetto ad una composizione annuale. Se allora componessi giornalmente:

$$\begin{aligned} t &= 1 \quad \text{(giorno dopo)} \\ X_1 &= X_0 + \tfrac{r}{365}X_0 = X_0(1+\tfrac{r}{365}) \\ &= 100 + \tfrac{10}{100}\tfrac{1}{365}100 = \\ &\vdots \\ t &= 365 \quad \text{(giorni dopo)} \\ X_{365} &= X_{364} + \tfrac{r}{365}X_{364} = X_0(1+\tfrac{r}{365})^{365} \\ &= 100(1+\tfrac{10}{100}\tfrac{1}{365})^{365} = 110.51 \end{aligned}$$

Dunque, dopo n anni, ovvero $h = 365\ n$ giorni

$$X_n = X_0(1+\frac{r}{365})^h = X_0(1+\frac{r}{365})^{365\ n}.$$

In generale, suddividendo l'intervallo temporale di un anno in k sottointervalli di ampiezza $\Delta t = 1/k$, il capitale alla fine dell'anno con composizione dell'interesse r sui sottointervalli Δt è dato da

$$X_1 = X_0(1+\frac{r}{k})^k = X_0(1+\Delta t\ r)^{1/\Delta t}.$$

Sia infine $T > 0$ un dato istante di tempo, che assumiamo essere un multiplo di Δt, $T = h\ \Delta t = h/k$: il capitale maturato al tempo T con composizione dell'interesse r sui sottointervalli di ampiezza Δt è

$$X_T = X_0(1 + \frac{r}{k})^h = X_0(1 + \frac{r}{k})^{k\ T} = X_0(1 + \Delta t\ r)^{T/\Delta t}. \tag{1.1}$$

Esempio 1.1. *Sia X_0 il capitale posseduto oggi. Se $r = 7\%$, quanti anni ci vogliono per raddoppiare il capitale, assumendo una composizione annuale degli interessi? Se aspetto 7 anni quanto deve valere r per conseguire il raddoppio del capitale?*

Poiché $X_n = X_0(1 + r)^n = X_0(1 + 0.7)^n$, per ottenere il raddoppio del capitale deve essere $X_n = 2X_0$, ovvero $X_0(1 + 0.7)^n = 2X_0$. Dunque n deve soddisfare la condizione $(1 + 0.7)^n = 2$ da cui

$$n = \frac{\log 2}{\log 1.07} \approx 10.$$

In base alla stessa relazione $X_n = X_0(1 + r)^n = 2X_0$, ma risolvendola rispetto ad r con $n = 7$, otteniamo

$$2 = (1 + r)^7 \iff r = 2^{1/7} - 1 \approx .$$

Sia r il tasso di interesse su base annua che componiamo sui sottoperiodi $\Delta t = 1/k$ e sia X_0 il capitale iniziale. Dopo un anno avremo

$$X_1 = X_0(1 + \frac{r}{k})^k.$$

Si definisce *tasso di interesse semplice effettivo*, $r_{eff}(k)$ equivalente al tasso r composto su k periodi quel tasso di interesse che permette di ottenere lo stesso capitale alla fine dell'anno, ovvero $X_1 = X_0(1 + r_{eff}(k))$. Dalla relazione $(1 + r_{eff}(k)) = (1 + \frac{r}{k})^k$ si ha quindi

$$r_{eff}(k) = (1 + \frac{r}{k})^k - 1 \iff r = k\left((1 + r_{eff}(k))^{1/k} - 1\right)$$

1.1.3 Interesse composto continuamente

Nell'interesse composto periodicamente, più è piccolo il periodo di tempo rispetto al quale si compone l'interesse, maggiore è il guadagno. Siamo allora interessati ad intervalli di tempo Δt sempre più piccoli: il capitale dopo un anno è dunque

$$X_1 = \lim_{\Delta t \to 0} X_0(1 + \Delta t\ r)^{1/\Delta t} = (\lim_{k \to +\infty} X_0(1 + \frac{r}{k})^k = X_0 e^r,$$

o considerando più generalmente un arbitrario istante di tempo $T > 0$

$$X_T = \lim_{\Delta t \to 0} X_0(1 + \Delta t\ r)^{T/\Delta t} = \lim_{k \to +\infty} X_0(1 + \frac{r}{k})^{k\ T} = X_0 e^{r\ T}.$$

Dunque il capitale maturato al tempo T se l'*interesse* fosse *composto continuamente* è

$$X_T = X_0 e^{r\ T}. \tag{1.2}$$

Esempio 1.2. *Sia $X_0 = 100$ Euro il capitale iniziale e $r = 10\%$ l'interesse annuale: allora il capitale dopo un anno con composizione continua degli interessi è*

$$X_1 = X_0 e^{r} = 100 e^{0.1} = 110.52$$

Osserviamo che poichè $(1 + x/k)^k \nearrow e^x$, la composizione continua degli interessi è sicuramente la più vantaggiosa per chi riceve gli interessi e di conseguenza la meno vantaggiosa per chi invece li deve pagare.

Anche in questo caso possiamo definire dei tassi effettivi equivalenti: dalle relazioni $X_1 = X_0 e^{r_c} = X_0(1 + r_{eff}(k)/k)^k$ otteniamo

$$r_c = k \log(1 + r_{eff}(k)/k) \Longleftrightarrow r_{eff}(k) = k(e^{r_c/k} - 1).$$

1.2 Valore temporale del denaro

Supponiamo che un deposito su un c/c paghi $r = 10\%$ annuo (interesse semplice) e supponiamo che r sia *certo* (ossia la banca paga l'interesse sicuramente, non fallisce!). Se $X_0 = 100$ Euro è il capitale iniziale, allora *con certezza* dopo un anno il nuovo capitale è $X_1 = 110$ €.

Quindi, il *valore attuale o presente* di 110 euro tra un anno è 100 euro disponibili subito. In altri termini, avere 100 €disponibili subito o avere 110 €disponibili tra un anno è la stessa cosa (se c'è un investimento certo):

$$X_0 = \mathrm{PV}(X_1).$$

Analogamente, il *valore futuro* di 100 euro disponibili subito tra un anno è 110 euro:

$$X_1 = \mathrm{FV}(X_0).$$

Poichè $X_1 = X_0(1 + r)$ e' immediato osservare che

$$\mathrm{PV}(X_1) = X_0 = \frac{X_1}{1 + r}, \qquad \mathrm{FV}(X_0) = X_1 = X_0(1 + r).$$

Assumendo invece una capitalizzazione continua degli interessi alla fine dell'anno si ha

$$\mathrm{PV}(X_1) = X_1 e^{-r}, \qquad \mathrm{FV}(X_0) = X_0 e^{r}.$$

Consideriamo un vettore a due componenti $v \in \mathbb{R}^2$ con $v = (x_0, x_1)$: interpretiamo le componenti del vettore come delle quantità monetarie disponibili a certi istanti di tempo fissati (p.e. $t = 0$ e $t = 1$) sul nostro c/c. Se $x_i > 0$ si parla di *entrate* mentre se $x_i < 0$ si parla di *uscite*. Il vettore v è detto *cashflow* o *flusso di cassa*. I flussi di cassa possono essere positivi o negativi.

Esempio 1.3. *Il vettore $v = (1, 110)$ indica la disponibilità di 1 Euro oggi e di 110 Euro* con certezza *tra un anno.*

Il vettore $v = (1, -10)$ indica invece la disponibilità di 1 Euro oggi e il pagamento di 10 Euro che dovrò con certezza effettuare tra un anno.

Più in generale possiamo definire un flusso di cassa su n istanti temporali $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ come un vettore $v \in \mathbb{R}^n$, $v = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, dove x_i è una quantità monetaria certamente disponibile (in entrata o in uscita) al tempo t_i.

1.2.1 Valore attuale

Vogliamo definire il valore attuale ed il valore futuro di un flusso di cassa v.

Consideriamo ad esempio il flusso di cassa definito dal vettore $v = (1, 110)$ che rappresenta la disponibilità di 1 Euro oggi e di 110 Euro tra un anno: il suo valore attuale è chiaramente 1 Euro oggi più il valore attuale dei 110 Euro disponibili certamente tra un anno, attualizzato rispetto ad un dato tasso di interesse r con capitalizzazione periodale (annuale): quindi

$$\mathrm{PV}(v) = 1 + \frac{110}{1+r}.$$

Se $r = 10\%$,

$$\mathrm{PV}(v) = 1 + \frac{110}{1 + 10/100} = 101.$$

Ciò vuol dire che adesso, oltre l'euro che ho in cassa, è come se ne avessi altri 100 che sicuramente tra un anno matureranno 10 euro di interesse.

Se dunque $v = (x_0, x_1)$, allora

$$\mathrm{PV}(v) = x_0 + \frac{x_1}{1+r}.$$

Il valore attuale di un flusso di cassa si può estendere a più anni ed a flussi di cassa relativi a tale periodo, avendo assunto che la partizione temporale, ovvero gli istanti di tempo fissati in cui si effettueranno con certezza movimenti monetari, sia fatta compatibilmente con il tipo di tasso di interesse considerato: se $v = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è il flusso di cassa dove x_i rappresenta la quantità monetaria che con certezza sarà movimentata alla fine dell'anno i-esimo e r è il tasso di interesse annuale, allora

$$\mathrm{PV}(v) = x_0 + \frac{x_1}{1+r} + \frac{x_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{x_n}{(1+r)^n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{(1+r)^i}.$$

In particolare:

- $v = x_0 \in \mathbb{R} \Longrightarrow \mathrm{PV}(x_0) = x_0$;
- $v = (0, 0, \ldots, x_n) \Longrightarrow \mathrm{PV}(v) = x_n/(1+r)^n$;

Esempio 1.4. *Sia* $v = (0, 0, 110)$ *e* $r = 10\%$*: allora* $PV(v) = 110/(1 + 0.1)^2 = 90.91$ *Euro, ossia il valore presente di 110 euro a pagarsi tra due anni con un tasso di interesse certo del* 10% *composto su base annua, è di* 90.91 *euro.*

In generale possiamo dare la seguente

Definizione 1.1. *Siano* r *il tasso di interesse annuale,* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ *istanti di tempo fissati che supponiamo equispaziati,* $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ *(i.e.* $t_i = i\Delta t$*),* $i = 1, \ldots, n-1$ *e* $v = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *un flusso di cassa relativo a tali tempi. Allora il valore attuale del flusso di cassa* v *con composizione periodale degli interessi su base* Δt *è*

$$PV(v) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{(1+\Delta t\ r)^i}$$

mentre con composizione continua degli interessi è

$$PV(v) = \sum_{i=0}^{n} x_i e^{-rt_i}.$$

1.2.2 Valore futuro

Possiamo ora definire in modo del tutto analogo il valore futuro di un flusso di cassa. Sia ad esempio $v = (x_0, x_1)$ e fissiamo la base periodale come base annua. Sia r un tasso di interesse certo annuale. Il valore della quantità disponibile oggi x_0 tra un anno è chiaramente $x_0(1+r)$; inoltre tra un anno si avrà la quantità x_1 e quindi

$$\mathrm{FV}(v) = x_0(1+r) + x_1.$$

Se $v = (x_0, x_1, x_2)$, si ha invece che il valore di x_0 tra due anni è $x_0(1+r)^2$, il valore di x_1 alla fine del secondo anno è $x_1(1+r)$ e poichè alla fine del secondo anno si avrà x_2, otteniamo

$$\mathrm{FV}(v) = x_0(1+r)^2 + x_1(1+r) + x_2.$$

Per un generico flusso di cassa $v = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dove x_i rappresenta la quantità monetaria che con certezza sarà movimentata alla fine dell'anno i-esimo e r è il tasso di interesse annuale, allora

$$\mathrm{FV}(v) = x_0(1+r)^n + x_1(1+r)^{n-1} + x_2(1+r)^{n-2} + \cdots + x_n = \sum_{i=0}^{n} x_i(1+r)^{n-i}.$$

Definizione 1.2. *Siano r il tasso di interesse annuale, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ istanti di tempo fissati che supponiamo equispaziati, $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ (i.e. $t_i = i\Delta t$), $i = 1, \ldots, n-1$ e $v = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ un flusso di cassa relativo a tali tempi. Allora il valore futuro del flusso di cassa v con composizione periodale degli interessi su base Δt è*

$$FV(v) = \sum_{i=0}^{n} x_i(1 + \Delta t\ r)^{n-i}$$

mentre con composizione continua degli interessi è

$$FV(v) = \sum_{i=0}^{n} x_i e^{rt_i}.$$

C'è qualche relazione tra il valore attuale (PV) ed il valore futuro (FV)?

Studiamo prima il caso con $n = 1$ (1 anno), $v = (x_0, x_1)$ e tasso di interesse annuo r: poichè

$$\mathrm{PV}(v) = x_0 + \frac{x_1}{1+r}, \qquad \mathrm{FV}(v) = x_0(1+r) + x_1$$

allora

$$(1+r)\mathrm{PV}(v) = \mathrm{FV}(v), \quad \text{o equivalentemente } \ \mathrm{PV}(v) = \frac{\mathrm{FV}}{1+r}$$

In generale, sia $v = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$: allora

$$(1+r)^n\mathrm{PV}(v) = \mathrm{FV}(v), \quad \text{o equivalentemente } \ \mathrm{PV}(v) = \frac{\mathrm{FV}}{(1+r)^n}$$

Esempio 1.5. *Si versino* 10 *rate annue costanti di* 1000 *Euro a partire da oggi per avere una rendita perpetua annuale R a partire dal decimo anno. Si determini l'ammontare della rata R assumendo un tasso di interesse annuale costante $r = 10\%$.*

1.3 Rendimenti e portafogli

Supponiamo di avere 2 possibili investimenti azionari,

$$\begin{array}{rcl} t & = & 0 \\ S_0^A & = & 10 \text{ €} \quad \text{(valore attuale del titolo A)} \\ S_0^B & = & 5 \text{ €} \quad \text{(valore attuale del titolo B)} \end{array}$$

e facciamo passare un mese:

$$\begin{array}{rcl} t & = & 1 \ \ \text{(un mese dopo)} \\ S_0^A & = & 18 \text{ €} \\ S_0^B & = & 10 \text{ €} \end{array}$$

Il *rendimento assoluto* $\tilde{R}$ di un investimento V in un dato intervallo temporale $[0,T]$ è definito dalla differenza del valore dell'investimento tra i due istanti di tempo considerati ed è dunque una quantità monetaria:

$$\tilde{R}_T = V(T) - V(0).$$

Per i due titoli considerati il rendimento assoluto dopo il primo mese è

$$\tilde{R}_1^A = S_1^A - S_1^A = 8\text{€},$$

$$\tilde{R}_1^B = S_1^B - S_1^B = 5\text{€}.$$

Se ho acquistato 100 azioni A, allora dopo un mese ho un guadagno netto di 800 €. Se ho acquistato 100 azioni B, allora dopo un mese ho un guadagno netto di 500 €. Saremmo dunque portati a credere che l'investimento nel titolo A sia più vantaggioso. Ciò non è chiaramente corretto, poichè il valore iniziale dell'investimento è differente.

Si definisce *rendimento relativo* di un investimento V in un dato intervallo temporale $[0,T]$ la quantità

$$R_T = \frac{V(T) - V(0)}{V(0)}.$$

Esempio 1.6. *Sia X_0 una quantità di denaro disponibile al tempo $t = 0$ che si deposita su un conto bancario che offre un tasso di interesse r. Il rendimento di tale investimento dopo $t = n$ anni, assumendo una composizione annuale degli interessi è*

$$R_n = \frac{X_n - X_0}{X_0} = \frac{X_0(1+r)^n - X_0}{X_0} = (1+r)^n - 1.$$

Si osservi che al termine del primo anno $R_1 = r$.

Il *rendimento relativo*, o semplicemente *rendimento*, non è una quantità monetaria ma una percentuale e rappresenta il rendimento ottenuto a parità di capitale investito. Sia infatti C_0 il capitale iniziale: supponendo di poter frazionare arbitrariamente i titoli azionari, posso acquistare $n_A = C_0/S_0^A$ azioni del titolo A o analogamente $n_B = C_0/S_0^B$ azioni del titolo B. Dopo un mese il valore del portafoglio è $C_1^A = n_A S_1^A$ o $C_1^B = n_B S_1^B$ e dunque il suo rendimento relativo è

$$\frac{C_1^A - C_0^A}{C_0^A} = \frac{S_1^A - S_0^A}{S_0^A} = R_1^A \text{ o } \frac{C_1^B - C_0^B}{C_0^B} = \frac{S_1^B - S_0^B}{S_0^B} = R_1^B$$

Nell'esempio considerato, se investo 1000 €su A posso comperare 100 azioni e dunque dopo un mese il valore dell'investimento è 1800 €. Se invece investo sul titolo B, posso acquistare 200 azioni e dunque dopo un mese valgono 2000 €: l'investimento più remunerativo (ovvero con il miglior guadagno) è B. Infatti i rendimenti relativi sono

$$\begin{aligned} R_1^A &= \tfrac{S_1^A - S_0^A}{S_0^A} = \tfrac{8}{10} = 80\% \\ R_1^B &= \tfrac{S_1^B - S_0^B}{S_0^B} = \tfrac{5}{5} = 100\% \end{aligned}$$

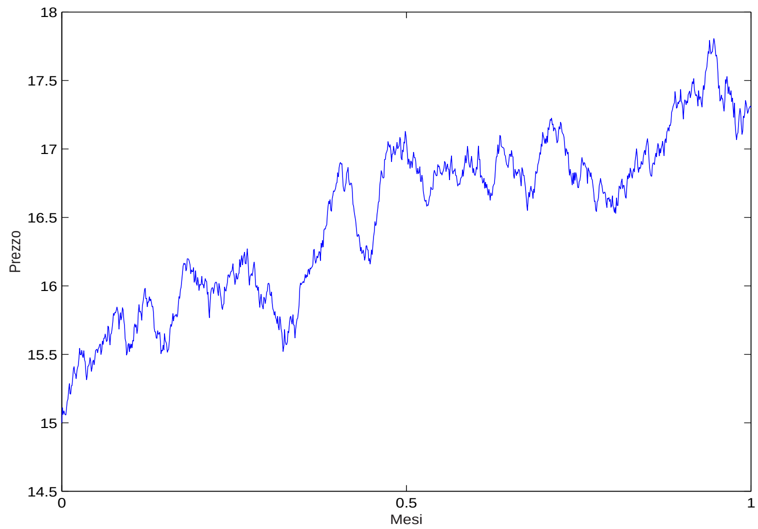
Quindi, in un mese il titolo A avrebbe reso l'80% del capitale investito, in un mese il titolo B avrebbe reso il 100% del capitale investito: il rendimento di B è superiore al rendimento di A!

Chiaramente nel momento in cui faccio l'investimento non so nulla del rendimento azionario; è dunque naturale pensare i rendimenti come variabili aleatorie. Ovviamente conosco il prezzo a cui compro (prezzo spot), ma non posso conoscere il prezzo futuro (e da qui l'aleatorietà).

Il grafico in figura rappresenta l'andamento del prezzo di listino (o valore) di un titolo azionario (stock) al variare del tempo, $S(t)$. Nell'esempio, il prezzo del titolo è aumentato, dal valore $S(0) = 15$ €al tempo $t = 0$ (oggi) al valore $S(1) = 17.5$ €al tempo $t = 1$ mese. Solo al termine del periodo considerato posso valutare il rendimento attenuto. Un titolo azionario può quindi avere certi andamenti fluttuanti nel futuro, che non possiamo prevedere da oggi. Da questo deriva l'incertezza dell'investimento, alla quale si associa un rischio.

La percentuale del rendimento può essere positiva o negativa: sarà positiva (guadagno) se il prezzo finale è superiore a quello iniziale, sarà negativa (perdita) se il prezzo finale è inferiore a quello iniziale.

Si consideri un *portafoglio* costituito da n attività finanziarie: possiamo identificare tale portafoglio mediante un vettore $h \in \mathbb{R}^n$ le cui componenti



rappresentano le quantità detenute di ciascuna attività. Se ad esempio le attività fossero tutte azionarie, i valori $h^{(i)}$ rappresenterebbero il numero delle azioni del titolo i possedute. Indicando con $X^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ il valore dell'attività i-esima, il valore del portafoglio h è

$$V^{(h)} = \sum_{i=1}^{n} h^{(i)} X^{(i)}.$$

Definiamo il peso relativo dell'attività i-esima nel portafoglio h la quantità $\omega^{(i)} = \frac{h^{(i)} X^{(i)}}{V^{(h)}}$. Chiaramente $\sum_{i=1}^{n} \omega^{(i)} = 1$. Supponiamo ora di mantenere il portafoglio nel periodo $[0, T]$, senza cioè cambiare i pesi delle varie attività: il suo valore al tempo T è dunque

$$V_T^{(h)} = \sum_{i=1}^{n} h^{(i)} X_T^{(i)},$$

dove abbiamo indicato con $X_T^{(i)}$ il valore al tempo T dell'attività i-esima. Possiamo quindi calcolare il rendimento di tale portafoglio:

$$R^{(h)} = \frac{V_T^{(h)} - V_0^{(h)}}{V_0^{(h)}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{h^{(i)} X_0^{(i)}}{V_0^{(h)}} \frac{X_T^{(i)} - X_0^{(i)}}{X_0^{(i)}} = \sum_{i=1}^{n} \omega_0^{(i)} R_T^{(i)},$$

dove $R_T^{(i)}$ è il rendimento dell'attività i-esima. Il rendimento di un portafoglio è dunque la combinazione convessa dei rendimenti delle attività che lo compongono.

Esempio 1.7. *Si consideri un portafoglio costituito da due attività, una non rischiosa ed una rischiosa, ad esempio un deposito bancario con tasso d'interesse annuale $r = 2\%$ costante ed una azione. Indichiamo con S_t il valore unitario dell'azione: il valore del portafoglio al tempo $t = 0$ è*

$$V_0^{(h)} = h^{(1)} + h^{(2)} S_0$$

dove $h^{(1)}$ è la quantità di denaro sul conto bancario (il numero di euro posseduti) e $h^{(2)}$ il numero di azioni. Il valore del portafoglio dopo un anno, $t = 1$, sarà

$$V_1^{(h)} = h^{(1)}(1 + r) + h^{(2)} S_t,$$

con un rendimento pari a

$$R^{(h)} = \frac{h^{(1)}}{V_0^{(h)}} r + \frac{h^{(2) S_0}}{V_0^{(h)}} R_1$$

con R_1 rendimento dell'azione.

Si considerino ora dei tempi $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ nei quali sia possibile modificare il portafoglio: abbiamo quindi una successione di vettori $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$ che rappresentano la composizione del portafoglio tra due tempi successivi. Il vettore h_j viene fissato al tempo t_j e rimane invariato fino al tempo successivo t_{j+1}. Tale successione si definisce *strategia di portafoglio*. Il valore del portafoglio al tempo t_j è

$$V_j^{(h)} = \sum_{i=1}^{n} h_{j-1}^{(i)} X_j^{(i)},$$

Possiamo supporre che l'ampiezza di ciascun intervallo sia costante, $t_j = t_{j-1} + \Delta t = j\Delta t$.

Una strategia di portafoglio si dice *auto-finanziante* se vale la condizione

$$\sum_{i=1}^{n} h_{j-1}^{(i)} X_j^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} h_j^{(i)} X_j^{(i)}, \quad \text{per ogni} \;\; j = 0, \ldots, n-1.$$

Tale condizione indica il fatto che ad ogni tempo j si possono cambiare i pesi delle attività ma il valore del portafoglio non può aumentare nè diminuire. In altre parole, non è possibile aggiungere o togliere capitale.

Esempio 1.8. *Consideriamo il portafoglio di due attività dell'esempio precedente. Una strategia di portafoglio $h_0, h_1, \ldots, h_n$ è auto-finanziante se ad ogni tempo j verifica la condizione*

$$h_{j-1}^{(1)}(1 + r) + h_{j-1}^{(2)} S_j = h_j^{(1)} + h_j^{(2)} S_j.$$

1.4 Arbitraggio

Il Sole 24 Ore riportava in una certa data tali quotazioni del valore relativo di monete (*divise*):

$$\begin{aligned} \frac{€}{\$} &= 0.9458 \\ \frac{\$}{Y} &= 114.4534 \\ \frac{€}{Y} &= 108.25 \end{aligned}$$

(con Y indichiamo lo Yen giapponese). Osserviamo che:

$$\frac{€}{Y} = \frac{€}{\$}\frac{\$}{Y} = 0.9458 \cdot 114.4534 = 108.25.$$

Se però avessi per esempio trovato $\frac{€}{Y} = 107.5$ allora facendo due cambi (operazione che assumiamo essere senza costi), ossia cambiando gli euro prima in dollari ($) e poi in yen (Y), avrei ottenuto un guadagno. Infatti, cambiando 1000 €in dollari avrei 954 $ che potrei cambiare in 107.25 yen, corrispondenti a 1006.977 €!

Questa operazione si sarebbe chiamata *arbitraggio*, ossia avrei avuto un guadagno certo a rischio nullo e senza muovere capitali (infatti nell'esempio considerato c'è un'immediata compra-vendita).

Quindi tutti i rapporti di concambio devono essere allineati affinchè non ci siano possibilità di arbitraggio. Nei mercati reali, opportunità di arbitraggio possono verificarsi, ma in genere nei mercati efficienti tendono a scomparire velocemente. Se infatti si verificasse una opportunità come quella descritta nell'esempio precedente, gli operatori del mercato sarebbero tutti portati a vendere euro per comprare dollari e quindi cambiarli in yen, alterando quindi per la legge della domanda-offerta, tutti i rapporti di concambio.

Questo tipo di operazione si estende anche ad altre situazioni: con gli arbitraggi ci si potrebbe arricchire senza investire capitali, e ciò non deve essere possibile, quindi non si devono creare opportunità di arbitraggio.

Si pensi a cosa succederebbe se:

- la banca A fa pagare un prestito al 4%
- la banca B paga un deposito al 5%

Se allora prendo un capitale da A e lo deposito in B guadagno l'1% senza aver tirato fuori un soldo dalle tasche!

In realtà a livello mondiale esistono delle opportunità di arbitraggio, durano pochissimo e a volte il loro costo supera un eventuale guadagno.

Nella teoria, il sistema vuole che non ci siano arbitraggi. Nella pratica, può capitare che persone all'interno del sistema finanziario riescano a chiudere arbitraggi a proprio favore.

Possiamo più formalmente definire un'opportunità di arbitraggio in un mercato con n attività finanziarie, tra le quali almeno una sia rischiosa, nel modo seguente.

Si consideri un'intervallo di tempo $[0, T]$ e siano $X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, \ldots, X_t^{(n)}$ i valori di tali attività per generici tempi che assumiamo discreti, $t = 0, \ldots, T$. Possiamo quindi considerare su queste attività delle strategie di portafoglio h. Al momento della formazione di un portafoglio il valore delle attività al tempo T sarà in generale aleatorio e dunque il valore stesso del portafoglio $V_T^{(h)}$ può essere pensato come una variabile aleatoria. Si può quindi definire un'opportunità di arbitraggio in questo mercato come un portafoglio autofinanziante h con le seguenti proprietà:

- $V_0^{(h)} = 0$;
- $V_T^{(h)} \geq 0$ con probabilità 1;
- $V_T^{(h)} > 0$ con probabilità strettamente positiva.

L'esistenza di possibilità di arbitraggio è strettamente legata alla cosiddetta *legge del prezzo unico*: se due attività finanziarie hanno lo stesso rendimento devono allora avere lo stesso prezzo. La tenuta di questa regola dipende infatti dalla presenza di operatori finanziari pronti ad approfittare di eventuali disallineamenti delle quotazioni, comprando prodotti sottovalutati e vendendo prodotti equivalenti sopravvalutati, realizzando così un profitto (e dunque un *arbitraggio)* ma spingendo contemporaneamente i prezzi verso l'equilibrio. E' evidente come ciò possa essere realizzabile in mercati dove sia possibile contrattare grandi quantità di titoli in breve tempo e con costi di transazione bassi e nei quali le informazioni rilevanti siano ampiamente disponibili per un gran numero di operatori.

1.5 Alcuni meccanismi: vendita allo scoperto e speculazione

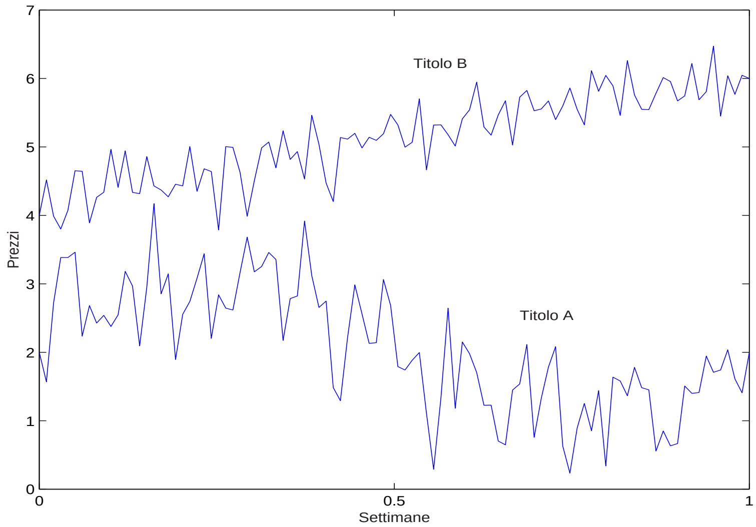
Vendita allo scoperto (short selling). Supponiamo di avere oggi (t=0) due titoli, ad esempio azionari, A e B i cui prezzi spot di oggi siano rispettivamente

$$\begin{aligned} S_0^A &= 2 \text{ €per azione} \\ S_0^B &= 4 \text{ €per azione.} \end{aligned}$$

Al tempo $t = 0$ il mio portafoglio contiene solo un'azione del titolo A, ma credo che B salirà e dunque vorrei comprarlo, ma non ho i soldi sufficienti: faccio allora una *vendita allo scoperto.*

Tramite un broker prendo in prestito un'azione A dal portafoglio di un altro investitore, che mi impegno a restituire ad una scadenza fissata, ad esempio una settimana. Quindi ora il mio portafoglio contiene due azioni A, lo liquido e incasso 4 €e compro istantaneamente un'azione B.

Supponiamo che A e B abbiano il seguente andamento:



Nel caso descritto, alla scadenza della vendita allo scoperto, (ossia una settimana dopo) vendo un'azione B (che è l'unica cosa che ho nel portafoglio), e incasso 6 €= 4 €+ 2 €. Con 2 €ricompro un'azione A e la restituisco al broker, che la vende a chi apparteneva. Con tale operazione dopo una settimana ho un capitale di 4 €, ossia ho guadagnato il 100%. Se nel portafoglio avessi tenuto solo l'azione A e non avessi fatto vendita allo scoperto, dopo una settimana non avrei avuto alcun guadagno.

La vendita allo scoperto è un'operazione molto rischiosa: alla fine potrei non avere i soldi per rendere le azioni prese in prestito.

Nel caso descritto:

- c'è un guadagno se A scende e B sale

- c'è perdita se A sale e B scende

E' importante evidenziare il fatto che nella vendita allo scoperto non si scambiano soldi ma azioni. Essendo un'operazione molto rischiosa, non è ammessa in tutti i mercati.

Speculazione. Sui mercati si può speculare su titoli azionari, beni materiali (petrolio, oro, argento ...), indici azionari, valute .... Vediamo un esempio di speculazione su valute.

Si ritiene che la sterlina (£) sia sopravvalutata e si vuole scommettere sul suo futuro ribasso. Avendo questa convinzione, prendo da una banca in prestito a 3 mesi 10 £con un interesse del 16% annuale, e lo faccio quando il rapporto di cambio è

$$\frac{\pounds}{\$} = 3/2.$$

Appena ricevute le 10 sterline, in base alla convinzione che ho le cambio tutte in dollari, ottenendo quindi 15\$. Supponiamo ora che la mia convinzione si realizzi e che dopo 3 mesi il rappporto sia

$$\frac{\pounds}{\$} = 1.$$

Allora ricambio i 15\$ in sterline, ottenendo 15$\pounds$: restituisco alla banca le 10 sterline prese in prestito più 4$\pounds$ di interesse. Mi resta quindi 1$\pounds$ di profitto. La scommessa è stata vincente! Osserviamo che se avessi preso in prestito 10 miliardi di sterline, dopo 3 mesi avrei guadagnato 1 miliardo!

Questo meccanismo di speculazione si basa anche sul fatto che se chiedo una grande quantità di sterline e le cambio subito tutte in dollari, è come se mi stessi liberando delle sterline e il mercato ne risente, tanto più se lo fanno anche altri investitori sulla mia scia. Scegliendo poi il momento politico adatto, il guadagno è garantito!! E' ciò che fece il finanziere ungherese Soros con il suo *Quantum fund* nel 1992, speculando al ribasso contro la lira italiana e la sterlina inglese e guadagnando in una notte 1 miliardo si sterline.

Se l'obiettivo dell'investitore è preservare nel tempo un capitale (ad esempio contro l'inflazione) allora non può entrare nel mercato con un atteggiamento speculativo. E' quindi fondamentale sapere l'obiettivo dell'investitore per capire i suoi movimenti nel mercato.

1.6 Un'estensione: il tasso di interesse dipendente dal tempo

Finora abbiamo considerato un tasso di interesse r su base annua costante nel tempo. Cosa accadrebbe se invece ci dipendesse?

Sia $X(t)$ il valore di un deposito bancario al tempo $t > 0$ e si denoti con $r(t)$ il tasso di interesse istantaneo (*spot rate* al tempo t, ovvero il tasso di interesse che si applica al tempo t per il calcolo degli interessi ad un tempo immediatamente successivo $t + \Delta t$, con Δt sufficientemente piccolo. Dunque

$$X(t + \Delta t) = X(t) + X(t)r(t)\Delta t,$$

come nel caso continuo, questa volta con il tasso r dipendente dal tempo. Poiche' stiamo immaginando Δt piccolo, possiamo passare al limite per $\Delta t \to 0$ che, assumendo l'esistenza della derivata prima (da destra), permette di ottenere

$$X(t)r(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{X(t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}X(t).$$

Il valore del deposito $X(t)$ è dunque soluzione del problema di Cauchy (equazione differenziale ordinaria a coefficienti non costanti)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) & = & r(t)X(t) \\ X(0) & = & X_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

la cui soluzione (per verifica diretta!) è data da

$$X(t) = X_0 e^{\int_0^t r(s)ds}. \tag{1.4}$$

La formula precedente permette di scrivere il valore attuale ed il valore futuro in termini del tasso istantaneo:

$$\mathrm{FV}(X_0) = X(t) = X_0 e^{\int_0^t r(s)ds}, \quad \mathrm{PV}(X(t)) = X_0 = X(t)e^{-\int_0^t r(s)ds}.$$

Osserviamo infine che se $r(t) \equiv r$ riotteniamo le formule introdotte nei paragrafi precedenti.

Concludiamo la sezione descrivendo una generalizzazione un po' più realistica della dinamica di un deposito bancario $X(t)$, ammettendo la possibilità di prelievi e versamenti. Indichiamo quindi con $C(t)$ il totale dei prelievi (o consumi) al tempo t e con $I(t)$ il totale dei versamenti (o entrate), funzioni che assumiamo derivabili con derivata $c(t)$ e $i(t)$ rispettivamente. Poichè nell'intervallo $[t, t + \Delta t)$ i versamenti sono $I(t + \Delta t) - I(t)$ ed i prelievi $C(t + \Delta t) - C(t)$ avremo chiaramente

$$X(t + \Delta t) = X(t) + X(t)r(t)\Delta t + I(t + \Delta t) - I(t) - (C(t + \Delta t) - C(t)).$$

Dividendo per Δt e facendo il limite per $\Delta t \to 0$, otteniamo

$$\frac{d}{dt}X(t) = r(t)X(t) + i(t) - c(t),$$

ovvero la dinamica di $X(t)$ è descritta dal seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}X(t) & = & r(t)X(t) + i(t) - c(t) \\ X(0) & = & X_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

la cui soluzione (verifica diretta!) è data da

$$X(t) = \left(X_0 + \int_0^t (i(s) - c(s)) e^{-\int_s^t r(u)du} ds \right) e^{\int_0^t r(s)ds}. \tag{1.6}$$