Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2004/2005
GE3 - Topologia Generale ed Elementi di Topologia Algebrica
Tutorato 8
Giovedì 5 Maggio 2005

1. Sia X un insieme con almeno tre elementi, sia $E \subset X$.
   Sia $\mathcal{T} := \{\emptyset, X, E, X \setminus E\}$. Verificare che:
   (a) $\mathcal{T}$ è una topolgia su X;
   (b) $(X, \mathcal{T})$ non è T_1, ma è regolare e normale.

2. Sia $\mathcal{S} := \{ \quad (-\infty, 0] \,; \quad (a, b) \,, 0 \leq a < b\}$. Verificare che:
   (a) $\mathcal{S}$ è sottobase di una topolgia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$;
   (b) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ non è T_0.

3. Sia $X := (-1, 2] \subset \mathbb{R}$ con topologia euclidea indotta. Siano:
   $\mathcal{B}_1 := \{ \quad (a, b) \,, \quad -1 \leq a < b \leq 2\}$
   $\mathcal{B}_2 := \{ \quad (a, 0) \cup (b, 2] \,, \quad -1 \leq a < 0 \leq b < 2\}$
   Verificare che:
   (a) $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ è base di una topolgia $\mathcal{T}$ su X;
   (b) $(X, \mathcal{T})$ è T_1 ma non T_2.

4. Sia $\mathcal{K}$ la topologia cofinita su di un insieme X non vuoto.
   Mostrare che $(X, \mathcal{K})$ è compatto.

5. Dato lo spazio topologico $(\mathbb{R}, j_s)$ determinare se:
   (a) $(\mathbb{R}, j_s)$ è compatto;
   (b) $(a, b] \subset \mathbb{R}$ è compatto in $(\mathbb{R}, j_s)$;
   (c) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ è compatto in $(\mathbb{R}, j_s)$.