Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2004/2005
GE3 - Topologia Generale ed Elementi di Topologia Algebrica
Tutorato 5
Giovedì 31 Marzo 2005

1. Sia $S := [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, sia l'applicazione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) := 2x$. (Osservare che $S \subset f(S)$)
   Sia infine $\mathcal{T} := \mathcal{P}(S) \cup \{\mathbb{R}\}$. Verificare che $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ è biunivoca e continua ma non un omeomorfismo.

2. Siano date su $\mathbb{R}$ le topologie $\mathcal{T} := i_s, i_d, \mathcal{E}, j_s, j_d$. Verificare che:
   (a) $(\mathbb{R}, i_s) \approx (\mathbb{R}, i_d)$
   (b) $(\mathbb{R}, j_s) \approx (\mathbb{R}, j_d)$
   (c) $(\mathbb{R}, \mathcal{E}) \not\approx (\mathbb{R}, i_s)$
   (d) $(\mathbb{R}, \mathcal{E}) \not\approx (\mathbb{R}, j_s)$
   (e) $(\mathbb{R}, i_s) \not\approx (\mathbb{R}, j_s)$

   ($\approx$ sta per ' è omeomorfo a ')

3. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e sia $S \subseteq X$. Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione caratteristica di S:
$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in S \\ 0 & \text{se } x \notin S \end{cases}$$
   Determinare gli aperti della topologia immagine diretta su $\mathbb{R}$
   $f_*(\mathcal{T}) := \left\{ V \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(V) \in \mathcal{T} \right\}$ nei seguenti casi:
   (a) S non è aperto e non è chiuso in $\mathcal{T}$;
   (b) S è aperto ma non è chiuso in $\mathcal{T}$;
   (c) S è chiuso ma non è aperto in $\mathcal{T}$;
   (d) S è aperto ed è chiuso in $\mathcal{T}$.

4. Siano $(X, \mathcal{T}_\mathcal{X})$ e $(Y, \mathcal{T}_\mathcal{Y})$ due spazi topologici metrizzabili. Se X e Y sono due insiemi con almeno due elementi, verificare che $\mathcal{T}_\mathcal{X} \cdot \mathcal{T}_\mathcal{Y}$ non è una topologia su $X \times Y$.

5. Siano $(X, \mathcal{T}_\mathcal{X})$ e $(Y, \mathcal{T}_\mathcal{Y})$ due spazi topologici verificanti una delle seguenti proprietà:
   (a) sono separabili;
   (b) sono N_1;
   (c) sono N_2.

   Dimostrare che lo spazio topologico prodotto $(X \times Y, \mathcal{T}_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}})$ verifica la stessa proprietà.