Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2004/2005
GE3 - Topologia Generale ed Elementi di Topologia Algebrica
Tutorato 2
Lunedì 14 Marzo 2005

1. Dimostrare che uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ a supporto finito, non discreto non è metrizzabile.

2. Dimostrare che in uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ metrizzabile la metrica d che induce la topologia $\mathcal{T}$ non è univocamente determinata.

3. Sia $S := \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, a], \forall a \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Verificare che S non è una topologia su $\mathbb{R}$.
   (b) Determinare la topologia $\mathcal{T}$ generata da S e confrontarla con la topologia i_s. ($i_s := \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, a), \forall a \in \mathbb{R}\}$).

4. Sia $\mathcal{K}$ la topologia cofinita su di un insieme X avente almeno tre elementi. Verificare che $\mathcal{U} := \{X - \{x\}, \forall x \in X\}$ è una sottobase ma non una base di $\mathcal{K}$.

5. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico discreto. Dimostrare che $\mathcal{T}$ verifica $N_2 \Leftrightarrow$ X è finito o numerabile.

6. Per ogni elemento $x \in \mathbb{R}$ determinare una base locale aperta e numerabile in $(\mathbb{R}, i_s)$. Dimostrare inoltre che $(\mathbb{R}, i_s)$ è N_2.

7. Dimostrare che $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ non è metrizzabile. (Usare gli assiomi di numerabilitá)

8. Dimostrare che lo spazio topologico $(\mathbb{R}, j_s)$ è N_1 ma non N_2. (j_s topologia su $\mathbb{R}$ che ha per base $\mathcal{B} := \{(a, b] \subset \mathbb{R}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$).