UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 3

Seconda prova di esonero - a.a. 2004-2005

1. (a) Si definiscano le tre nozioni di compattezza negli spazi topologici;

(b) si enunci il teorema che relaziona tali nozioni negli spazi metrici;

(c) si dimostri tale teorema.

2. (a) Sia X un sottoinsime chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea e sia Y un sottoinsieme chiuso di X. Sia d la distanza indotta su Y da quella euclidea e si denotino con $D_r(y)$ i dischi in Y. Si dimostri che, per ogni $n \geq 1$, esistono dei punti $y_1, \dots, y_m$ tali che

$$Y = D_{\frac{1}{n}}(y_1) \cup \ldots \cup D_{\frac{1}{n}}(y_m).$$

(b) Sia (X, d) uno spazio metrico con la seguente proprietà: per ogni $x \in X$ e per ogni $r > 0$ esiste un $r' > r$ tale che il disco chiuso $\overline{D_{r'}(x)}$ è compatto. Si dimostri che un sottoinsieme $Y \subset X$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

3. Sia $\mathcal{T}$ una topologia su $\mathbb{R}$ e si consideri il sottospazio $X = \mathbb{R} - [-1, 1]$. Sia $Y = X \cap [-2, 2]$ e si consideri in X la relazione di equivalenza

$$x \sim x' \quad \text{se e solo se} \quad x, x' \in Y \text{ o } x = x'.$$

(a) Si dimostri che se $\mathcal{T}$ è la topologia cofinita, allora $X/\sim$ è connesso;

(b) Si dimostri che se $\mathcal{T}$ è la topologia euclidea, allora $X/\sim$ è connesso;

(c) Esiste una topologia non discreta $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$ tale che $X/\sim$ è sconnesso?

4. Siano

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}, \quad X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

con una topologia $\mathcal{T}$. Sia $f : X \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione continua (dove su $\mathbb{R}^n$ c'è la topologia euclidea) tale che $f(R)$ è una retta ed inoltre $f(C)$ è chiuso in $\mathbb{R}^n$ per ogni chiuso $C \subset R$.

(a) Se $n = 3$ e $\mathcal{T}$ è la topologia euclidea, si dimostri che f non può essere biiettiva;

(b) Sia π la proiezione di X sull'asse delle y e si consideri la topologia $\mathcal{T}$ i cui aperti sono $\emptyset, X$ ed i sottoinsiemi $A \subset X$ tali che $\pi(A) \subset \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$.

(b1) Si dimostri che $(X, \mathcal{T})$ è connesso.

(b2) Se $n = 2$, si dimostri che f non può essere biiettiva.

5. (a) Siano $I = [0,1]$ e $\mathbb{R}$ entrambi con la topologia euclidea. Si dimostri che $L([0,1], \mathbb{R})$, con la topologia dell'estremo superiore, è connesso.

(b) Siano (X, d_X), (Y, d_Y) e (Z, d_Z) tre spazi metrici con (Z, d_Z) compatto. Si dimostri che se $C(Z, X \times Y)$ è connesso allora lo sono anche $C(Z, X)$ e $C(Z, Y)$.

SOLUZIONI

1. (a) [Sernesi, par. 9, pag. 101 e def. 10.7]. (b) e (c) [Sernesi, Teor. 10.9]. ■

2.(a) X è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea, quindi X è compatto per il Cor. 9.13 del [Sernesi]. Y è chiuso in X quindi per la Prop. 9.2 del [Sernesi] si ha che Y, con la topologia indotta da quella euclidea, è uno spazio metrico compatto, quindi, per il Teor. 10.13 del [Sernesi] si ha che Y è totalmente limitato.

(b) Se Y è compatto allora è chiuso dato che X è di Hausdorff. Inoltre Y è certamente limitato dato che, fissato $y \in Y$, il ricoprimento aperto

$$Y \subset \bigcup_{n \geq 1} D_n(y)$$

deve avere sottoricoprimento finito.

Viceversa se Y è chiuso e limitato in X allora esiste un disco $D_r(x)$ tale che $Y \subset D_r(x)$. Per ipotesi esiste un $r' > r$ tale che $\overline{D_{r'}(x)}$ è compatto. Ne segue che

$$Y \subset D_r(x) \subset D_{r'}(x) \subset \overline{D_{r'}(x)}.$$

Allora Y è chiuso in un compatto, quindi è compatto. ■

3. (a) Si noti che se $\mathcal{T}$ è la topologia cofinita su X allora $(X, \mathcal{T})$ è connesso, altrimenti $X = C \amalg C'$, dove C, C' sono chiusi non vuoti e diversi da X, quindi C, C' sono finiti, da cui X è finito, contraddizione. Allora anche $X/\sim$ è connesso.

(b) Supponiamo che $X/\sim$ è sconnesso, quindi $X/\sim = U \amalg V$ è unione di aperti disgiunti. Allora anche $X = p^{-1}(U) \amalg p^{-1}(V)$. Dato che $(-\infty, -1)$ è connesso ne segue che è contenuto in uno dei due aperti, per esempio $(-\infty, -1) \subset p^{-1}(U)$. Ora dato che V non è vuoto ne segue che esiste $x \in p^{-1}(V)$ quindi certamente $x \notin (-\infty, -1)$, da cui $x \in (1, \infty)$.

Ne segue che $(1,\infty) \subset p^{-1}(V)$. Ma ora $p(-2) \in U, p(2) \in V$ e $p(-2) = p(2)$, da cui $U \cap V$ non è vuoto, contraddizione.
(c) Sia $Z = (-\infty, -2)$ e sia $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}, Z, \mathbb{R} - Z\}$. Si vede facilmente che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}$. Mostriamo che $p(Z)$ è chiuso ed aperto in $X/\sim$. Dato che $p(Z)$ non è vuoto e non coincide con $X/\sim$, ne seguirà che $X/\sim$ non è connesso. Ora osserviamo che

$$p^{-1}(p(Z)) = \{x \in X : \exists z \in Z : x \sim z\}$$

ne segue che $p^{-1}(p(Z)) = Z$ è aperto in X, dunque, per definizione di topologia quoziente, che $p(Z)$ è aperto in $X/\sim$. Ora $p^{-1}(p(Z)) = Z$ è anche chiuso in X, quindi $p(Z)$ è chiuso in $X/\sim$ dato che $p^{-1}(X/\sim - p(Z)) = X - p^{-1}(p(Z)) = X - Z$ è aperto in X. ∎
4. (a) Mostriamo che f è chiusa. Questo basta dato che se f è anche continua e biiettiva allora è un omeomorfismo, ma allora anche la restrizione di f a $X - R$ in $\mathbb{R}^3 - f(R)$ è un omeomorfismo, ma questo non è possible dato che $X - R$ è sconnesso mentre $\mathbb{R}^3 - f(R)$ è connesso (ricordiamo che $f(R)$ è una retta). Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco. Sia ora C un chiuso in X. Allora $C = (C \cap R) \cup (C \cap D)$ e quindi $f(C) = f(C \cap R) \cup f(C \cap D)$. Ora $f(C \cap R)$ è chiuso per ipotesi, mentre $C \cap D$ è chiuso in un compatto, quindi è compatto, quindi anche $f(C \cap D)$ è compatto. Ma $\mathbb{R}^3$ è di Hausdorff, da cui $f(C \cap D)$ è chiuso. Allora anche $f(C)$ è chiuso.
(b1) Se $X = A \amalg B$ entrambi aperti allora uno dei due deve coincidere con X, altrimenti si ha la contraddizione $\pi(X) = \pi(A) \cup \pi(B) \subset \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$. ∎
(b2) Come sopra se f è biiettiva allora è un omeomorfismo, da cui $X - R$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2 - f(R)$. Ora $\mathbb{R}^2 - f(R)$ è sconnesso, quindi basterà dimostrare che $X - R$ è connesso. Sia $X - R = A \amalg B$ entrambi aperti, allora uno dei due deve coincidere con $X - R$, altrimenti si ha la contraddizione $\pi(X - R) = \pi(A) \cup \pi(B) \subset \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$. ∎
5. (a) Infatti $L(I, \mathbb{R})$ con la topologia dell'estremo superiore è connesso per archi, dato che se $f, g \in L(I, \mathbb{R})$ allora, per ogni t tale che $0 \leq t \leq 1$ si ha che $tf + (1-t)g \in L(I, \mathbb{R})$. Ora dimostriamo che l'applicazione $a : I \to L(I, \mathbb{R})$ definita da $a(t) = tf + (1-t)g$ è un arco che congiunge f e g. Ovviamente basta la continuità di a. Se $f = g$ allora a è costante, quindi continua. Se $f \neq g$ sia $M = \sup_{x \in I}\{|f(x) - g(x)|\}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ sia $\delta = \varepsilon / M$. Ora, se $|t - t_0| < \delta$, allora

$$|tf(x) + (1-t)g(x) - t_0 f(x) - (1-t_0)g(x)| = |(t-t_0)(f(x) - g(x))| < \delta M \leq \varepsilon$$

quindi anche $\delta(a(t), a(t_0)) = \sup_{x\in I}\{|a(t) - a(t_0)|\} < \varepsilon$.
(b) $X \times Y$ è uno spazio metrico per esempio con la distanza

$$d((x, y), (x', y')) = \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}.$$

Sia ora $\pi_1 : X \times Y \to X$ la prima proiezione, $\pi_2 : X \times Y \to Y$. Basta dimostrare che l'applicazione naturale $\phi : C(Z, X \times Y) \to C(Z, X)$ definita da $\phi(f) = \pi_1 \circ f$ è continua e suriettiva (e analogamente proiettando su Y). Sia ora $g \in C(Z, X)$ e, fissato un qualsiasi punto $y_0 \in Y$ definiamo $f(z) = (g(z), y_0) \in X \times Y$. Per la Prop. 6.6 del [Sernesi] si ha che $f \in C(Z, X \times Y)$ e ovviamente che $\phi(f) = g$, dunque ϕ è suriettiva. Ora per ogni $f \in C(Z, X \times Y)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ sia $\delta = \varepsilon$. Se $\delta(f, f') = \sup_{z\in Z}\{d(f(z), f'(z))\} < \delta$ allora, per ogni $z \in Z$ si ha che

$$d(f(z), f'(z)) = \max\{d_X(\pi_1(f(z)), \pi_1(f'(z))), d_Y(\pi_2(f(z)), \pi_2(f'(z)))\} < \delta$$

allora $\delta(\pi \circ f, \pi \circ f') = \sup_{z\in Z}\{d_X(\pi(f(z)), \pi(f'(z)))|\} < \delta = \varepsilon$. ■