UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 3

Seconda prova di esonero - a.a. 2004-2005

1. (a) Si definiscano le tre nozioni di compattezza negli spazi topologici;

(b) si enunci il teorema che relaziona tali nozioni negli spazi metrici;

(c) si dimostri tale teorema.

2. (a) Sia X un sottoinsime chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea e sia Y un sottoinsieme chiuso di X. Sia d la distanza indotta su Y da quella euclidea e si denotino con $D_r(y)$ i dischi in Y. Si dimostri che, per ogni $n \geq 1$, esistono dei punti $y_1, \ldots, y_m$ tali che

$$Y = D_{\frac{1}{n}}(y_1) \cup \ldots \cup D_{\frac{1}{n}}(y_m).$$

(b) Sia (X, d) uno spazio metrico con la seguente proprietà: per ogni $x \in X$ e per ogni $r > 0$ esiste un $r' > r$ tale che il disco chiuso $\overline{D_{r'}(x)}$ è compatto. Si dimostri che un sottoinsieme $Y \subset X$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

3. Sia $\mathcal{T}$ una topologia su $\mathbb{R}$ e si consideri il sottospazio $X = \mathbb{R} - [-1, 1]$. Sia $Y = X \cap [-2, 2]$ e si consideri in X la relazione di equivalenza

$$x \sim x' \quad \text{se e solo se} \quad x, x' \in Y \text{ o } x = x'.$$

(a) Si dimostri che se $\mathcal{T}$ è la topologia cofinita, allora $X/\sim$ è connesso;

(b) Si dimostri che se $\mathcal{T}$ è la topologia euclidea, allora $X/\sim$ è connesso;

(c) Esiste una topologia non discreta $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$ tale che $X/\sim$ è sconnesso?

4. Siano

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}, \quad X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

con una topologia $\mathcal{T}$. Sia $f : X \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione continua (dove su $\mathbb{R}^n$ c'è la topologia euclidea) tale che $f(R)$ è una retta ed inoltre $f(C)$ è chiuso in $\mathbb{R}^n$ per ogni chiuso $C \subset R$.

(a) Se $n = 3$ e $\mathcal{T}$ è la topologia euclidea, si dimostri che f non può essere biiettiva;

(b) Sia π la proiezione di X sull'asse delle y e si consideri la topologia $\mathcal{T}$ i cui aperti sono $\emptyset, X$ ed i sottoinsiemi $A \subset X$ tali che $\pi(A) \subset \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$.

(b1) Si dimostri che $(X, \mathcal{T})$ è connesso.

(b2) Se $n = 2$, si dimostri che f non può essere biiettiva.

5. (a) Siano $I = [0,1]$ e $\mathbb{R}$ entrambi con la topologia euclidea. Si dimostri che $L([0,1], \mathbb{R})$, con la topologia dell'estremo superiore, è connesso.

(b) Siano (X, d_X), (Y, d_Y) e (Z, d_Z) tre spazi metrici con (Z, d_Z) compatto. Si dimostri che se $C(Z, X \times Y)$ è connesso allora lo sono anche $C(Z, X)$ e $C(Z, Y)$.