UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 3

Prima prova di esonero - a.a. 2004-2005

1. (a) Si definiscano gli assiomi di numerabilità e la nozione di separabilità di uno spazio topologico;

(b) Si enunci il risultato principale che relaziona gli assiomi di numerabilità, la separabilità e gli spazi metrizzabili;

(c) si dimostri tale risultato.

2. Siano $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tali che $a_1 < b_1$ e $a_2 < b_2$. Definiamo gli insiemi

$$R_{a_1,a_2,b_1,b_2} = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a_1 < x_1 \leq b_1 \ a_2 < x_2 \leq b_2 \ \}.$$

e

$$\mathcal{B} = \{R_{a_1,a_2,b_1,b_2} \ : \ a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}, a_1 < b_1, a_2 < b_2\}.$$

(a) Si dimostri che esiste un'unica topologia $\mathcal{T}_\mathcal{B}$ su $\mathbb{R}^2$ che ha $\mathcal{B}$ come base.

(b) Si dimostri che lo spazio topologico $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\mathcal{B})$ soddisfa il primo assioma di numerabilità.

(c) Lo spazio topologico $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\mathcal{B})$ è separabile?

3. Sia $\mathcal{T}$ una topologia su $\mathbb{R}$ e si considerino gli spazi topologici $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ e $(\mathbb{R}, j_d)$, cioè la retta reale con la topologia degli intervalli chiusi a sinistra e aperti a destra e sia $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{prod})$ lo spazio topologico prodotto.

(a) Sia $\mathcal{T}$ la topologia degli intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra e $P = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Si determinino $Int(\{P\})$, $Est(\{P\})$, $\overline{\{P\}}$.

(a) Sia $\mathcal{T}$ la topologia delle semirette illimitate a sinistra e $P = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Si determinino $Int(\{P\})$, $Est(\{P\})$, $\overline{\{P\}}$.

(c) Esiste una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$ tale che $P = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ è aperto in $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{prod})$?

4. Siano $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{cofin})$ l'insieme dei numeri naturali con la topologia cofinita e sia $f : X \to \mathbb{N}$ un'applicazione.

(a) Si determini, per ogni $n \geq 1$, una proprietà P_n tale che

$$f \text{ è continua se e solo se f soddisfa } P_n.$$

(b) Si dimostri che, qualunque sia X con almeno due elementi, esiste una topologia non banale $\mathcal{T}$ su X tale che le uniche applicazioni continue $f : X \to \mathbb{N}$ sono le costanti.

5. Siano (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \subset X$ un sottoinsime infinito e tale che Y ha un numero finito di punti di accumulazione, cioè $D(Y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

(a) Si determini sotto quale condizione su $x_1, \ldots, x_n$ si ha che Y è chiuso e aperto.

(b) Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di aperti di (X, d) tali che $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. È sempre possibile trovare un numero finito di tali aperti, diciamo $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$, tali che ancora vale l'inclusione

$$Y \subseteq A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_m}?$$