**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE**

**Corso di Laurea in Matematica**

**GEOMETRIA 3**

**Prima prova di esonero - a.a. 2004-2005**

**1.** (a) Si definiscano gli assiomi di numerabilità e la nozione di separabilità di uno spazio topologico;
(b) Si enunci il risultato principale che relaziona gli assiomi di numerabilità, la separabilità e gli spazi metrizzabili;
(c) si dimostri tale risultato.

**2.** Siano $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tali che $a_1 < b_1$ e $a_2 < b_2$. Definiamo gli insiemi

$$R_{a_1,a_2,b_1,b_2} = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a_1 < x_1 \leq b_1 \ a_2 < x_2 \leq b_2 \ \}.$$

e

$$\mathcal{B} = \{R_{a_1,a_2,b_1,b_2} \ : \ a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}, a_1 < b_1, a_2 < b_2\}.$$

(a) Si dimostri che esiste un'unica topologia $\mathcal{T}_\mathcal{B}$ su $\mathbb{R}^2$ che ha $\mathcal{B}$ come base.
(b) Si dimostri che lo spazio topologico $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\mathcal{B})$ soddisfa il primo assioma di numerabilità.
(c) Lo spazio topologico $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\mathcal{B})$ è separabile?

**3.** Sia $\mathcal{T}$ una topologia su $\mathbb{R}$ e si considerino gli spazi topologici $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ e $(\mathbb{R}, j_d)$, cioè la retta reale con la topologia degli intervalli chiusi a sinistra e aperti a destra e sia $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{prod})$ lo spazio topologico prodotto.
(a) Sia $\mathcal{T}$ la topologia degli intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra e $P = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Si determinino $Int(\{P\})$, $Est(\{P\})$, $\overline{\{P\}}$.
(b) Sia $\mathcal{T}$ la topologia delle semirette illimitate a sinistra e $P = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Si determinino $Int(\{P\})$, $Est(\{P\})$, $\overline{\{P\}}$.
(c) Esiste una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$ tale che $P = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ è aperto in $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{prod})$?

**4.** Siano $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{cofin})$ l'insieme dei numeri naturali con la topologia cofinita e sia $f : X \to \mathbb{N}$ un'applicazione.
(a) Si determini, per ogni $n \geq 1$, una proprietà $P_n$ tale che

$$f \text{ è continua se e solo se f soddisfa } P_n.$$

(b) Si dimostri che, qualunque sia $X$ con almeno due elementi, esiste una topologia non banale $\mathcal{T}$ su $X$ tale che le uniche applicazioni continue $f : X \to \mathbb{N}$ sono le costanti.

**5.** Siano $(X, d)$ uno spazio metrico e sia $Y \subset X$ un sottoinsime infinito e tale che $Y$ ha un numero finito di punti di accumulazione, cioè $D(Y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

(a) Si determini sotto quale condizione su $x_1, \ldots, x_n$ si ha che $Y$ è chiuso e aperto.

(b) Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di aperti di $(X, d)$ tali che $Y \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i$. È sempre possibile trovare un numero finito di tali aperti, diciamo $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$, tali che ancora vale l'inclusione

$$Y \subseteq A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_m}?$$

## SOLUZIONI

**1.** (a) [Sernesi, paragrafi 2 e 3]. (b) e (c) [Sernesi, Prop. 3.7]. ■

**2.** (a) Applichiamo la Prop. 2.2 del [Sernesi]. Si ha

$$\bigcup_{a_1 < b_1, a_2 < b_2} R_{a_1, a_2, b_1, b_2} = \mathbb{R}^2.$$

Inoltre, dato che $(a_1, b_1] \cap (a'_1, b'_1]$ se non vuoto, è ancora del tipo $(c, d]$ ne segue che anche $R_{a_1, a_2, b_1, b_2} \cap R_{a'_1, a'_2, b'_1, b'_2}$ se è non vuoto, è ancora dello stesso tipo $R_{a,b,c,d}$. Quindi anche la seconda condizione della Prop. 2.2 del [Sernesi] è soddisfatta ed esiste un'unica topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ su $\mathbb{R}^2$ che ha $\mathcal{B}$ come base.

(b) Per ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e per ogni intorno $N$ di $(x, y)$ nella topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ si ha che esiste un aperto $A \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ tale che $(x, y) \in A \subset N$ e quindi esiste un $R = R_{a_1, a_2, b_1, b_2}$ tale che $(x, y) \in R \subset A$. Allora, per $n$ molto grande si ha che l'aperto $(x - \frac{1}{n}, x] \times (y - \frac{1}{n}, y]$ è tale che

$$(x, y) \in (x - \frac{1}{n}, x] \times (y - \frac{1}{n}, y] \subset R \subset A \subset N$$

e quindi $\{(x - \frac{1}{n}, x] \times (y - \frac{1}{n}, y]\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sistema fondamentale di numerabile intorni di $(x, y)$.

(c) Sia $S = \mathbb{Q}^2$. Allora $S$ è numerabile e anche denso dato che per ogni $R_{a_1, a_2, b_1, b_2}$ si ha $S \cap R_{a_1, a_2, b_1, b_2} \neq \emptyset$. Quindi lo spazio topologico $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$ è separabile. ■

**3.** (a) In questo caso una base di $\mathcal{T}_{prod}$ è data dagli aperti $R_{a,b,c,d} = (a, b] \times [c, d)$. Dato che nessun $R_{a,b,c,d}$ può essere contenuto in $\{P\}$ si deduce che $Int(\{P\}) = \emptyset$, mentre per ogni punto $Q \neq P$ possiamo trovare un $R_{a,b,c,d}$ tale che $Q \in R_{a,b,c,d} \subset \mathbb{R}^2 - \{P\}$, quindi $Est(\{P\}) = \mathbb{R}^2 - \{P\}$. Ne segue che $\overline{\{P\}} = \{P\}$.

(b) In questo caso una base di $\mathcal{T}_{prod}$ è data dagli aperti $R_{a,b,c} = (-\infty, a) \times [b, c)$. Dato che nessun $R_{a,b,c}$ può essere contenuto in $\{P\}$ si deduce ancora che $Int(\{P\}) = \emptyset$. Si denoti con $S$ la semiretta destra orizzontale uscente da $P$. Se $Q \notin S$ allora possiamo trovare un $R_{a,b,c}$ tale che $Q \in R_{a,b,c} \subset \mathbb{R}^2 - S$, mentre questo non è possibile se $Q \in S$. Se ne conclude che $Est(\{P\}) = \mathbb{R}^2 - S$. Ne segue che $\overline{\{P\}} = S$.

(c) Se esiste una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$ tale che $P = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ è aperto in $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{prod})$ allora esiste un aperto $A \in \mathcal{T}$ ed un intervallo $[c, d)$ tali che $A \times [c, d) \subset \{P\}$. Quindi si ha la contraddizione $[c, d) \subset \{1\}$. ∎

**4.** (a) $f$ è continua se e solo se $f^{-1}(C)$ è chiuso in $X$ per ogni chiuso $C$ in $\mathbb{N}$. Dato che quanto sopra è ovvio se $C = \emptyset$ o $C = \mathbb{N}$, ne segue, per definizione di topologia cofinita, che $f$ è continua se e solo se $f^{-1}(\{n_1, \ldots, n_k\})$ è chiuso in $X$ per ogni $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. Ma $f^{-1}(\{n_1, \ldots, n_k\}) = f^{-1}(n_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(n_k)$. Quindi $f$ è continua se e solo se $f^{-1}(n)$ è chiuso in $X$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Possiamo definire allora $P_n$ : $f^{-1}(n)$ è chiuso in $X$.

(b) Se $f : X \to \mathbb{N}$ è continua e non costante allora esistono almeno due punti $n_1, n_2 \in \mathrm{Im}(f)$, quindi due chiusi non vuoti e disgiunti $f^{-1}(n_1)$ e $f^{-1}(n_2)$ in $X$. Ne segue che una qualsiasi topologia per cui le applicazioni non costanti possono essere continue deve avere almeno 4 chiusi e quindi almeno 4 aperti. Sia allora $Y$ un sottoinsieme proprio e non vuoto di $X$ e sia $\mathcal{T} = \{\emptyset, Y, X\}$. Si verifica subito che $\mathcal{T}$ è una una topologia non banale su $X$ ed è tale che le uniche applicazioni continue $f : X \to \mathbb{N}$ sono le costanti. ∎

**5.** (a) Si ha $\overline{Y} = Y \cup D(Y)$. Quindi $Y$ è chiuso se e solo se $x_1, \ldots, x_n \in Y$. $Y$ è aperto se e solo se per ogni $y \in Y$ esiste un $r > 0$ tale che $D_r(y) \subset Y$.

(b) No. Si noti infatti che la topologia indotta su $Y - D(Y)$ è discreta. Allora sia per esempio $(\mathbb{R}, eucl.)$ e $Y = \bigcup_{n \geq 1} \{\frac{1}{n}, n\}$. Allora $D(Y) = \{0\}$. D'altra parte però se $A_1 = (-1, 2)$ e $A_n = (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ per $n \geq 2$ allora $Y \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ma non è possibile trovare un numero finito di tali aperti, diciamo $A_{n_1}, \ldots, A_{n_m}$, tali che ancora vale l'inclusione $Y \subseteq A_{n_1} \cup \ldots \cup A_{n_m}$. ∎