Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 - Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2004/2005
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatrice: Dott.ssa A. Scaramuzza - Tutore: I. Olivieri

22/03/2005

Esercizio 1. Dimostrare che l'applicazione $f : X \to \mathbb{R}^n$ è continua in $x \in X$ se e solo se sono continue le applicazioni

$$p_i \circ f : X \to \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

dove p_i denota la i-esima proiezione di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. Sia (X, d) uno spazio mtrico e sia $D_r(x)$ un disco aperto. Verificare che:
- $Est(D_r(x)) \supseteqq \{y \in X \mid d(x, y) > r\}$
- $Fr(D_r(x)) \subseteqq \{y \in X \mid d(x, y) = r\}$
- $\overline{D_r(x)} \subseteqq \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$

Esercizio 3. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico metrizzabile. Dimostrare che il derivato è chiuso.

Esercizio 4. Sia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y > 0\ \}$. Determinare interno, esterno, frontiera, chiusura e derivato di S rispetto alla topologia euclidea.

Esercizio 5. Siano $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ due topologie su un insieme X tali che $\mathcal{T} \prec \mathcal{T}'$. Sia S un sottoinsieme di X. Verificare che:
- $Int(S) \subset Int'(S)$
- $Est(S) \subset Est'(S)$
- $Fr'(S) \subset Fr(S)$
- $\overline{S'} \subset \overline{S}$
- $D'(S) \subset D(S)$

dove l'indice $'$ denota l'interno, l'esterno, la frontiera, la chiusura e il derivato rispetto alla topologia $\mathcal{T}'$.

Esercizio 6. Dimostrare che lo spazio topologico euclideo $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ verifica il secondo assioma di numerabilità provando che l'insieme dei dischi

$$\mathcal{D} = \{D_h(q) \mid q \in \mathbb{Q}^n, h \in \mathbb{Q}, h > 0\ \}$$

è una base di $\mathcal{E}$.

Esercizio 7. Sia $\{x_n\}$ una successione in $(\mathbb{R}, j_s)$. Verificare che se $\{x_n\}$ converge allora converge ad un unico limite.