Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 - Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2004/2005
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatrice: Dott.ssa A. Scaramuzza - Tutore: I. Olivieri

10/05/2005

Esercizio 1. Sia X un insieme e sia $\mathcal{K}$ la topologia cofinita allora X è compatto.

Esercizio 2. Sia X un insieme infinito e sia $\mathcal{T}$ una topologia su X. Dimostrare che:

1. se $\mathcal{T} \prec \mathcal{K}$ allora ogni $S \subset X$ è compatto
2. se ogni sottoinsieme di $(X, \mathcal{T})$ è compatto allora $(X, \mathcal{T})$ non è T2.

Esercizio 3. Sia $S = (a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$. Dimostrare che S non è compatto rispetto alla topologia j_s fornendo un ricoprimento privo di sottoricoprimenti finiti.
Successivamente stabilire che se l'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ è compatto rispetto alle topologie $\mathcal{E}, j_s, \mathcal{K}$.

Esercizio 4. Sia $(X, \mathcal{T}_d)$ uno spazio topologico metrizzabile.

1. Verificare che ogni compatto C di $(X, \mathcal{T}_d)$ è chiuso e limitato.
2. Dare un'esempio in cui non vale il viceversa.

Esercizio 5. Sia $(X, \mathcal{T}_d)$ uno spazio topologico metrizzabile. Dimostrare che se $(X, \mathcal{T}_d)$ è compatto allora $(X, \mathcal{T}_d)$ è separabile.

Esercizio 6. Verificare che:

1. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ è localmente compatto.
2. $(\mathbb{Q}, \mathcal{E}\big|_{\mathbb{Q}})$ non è localmente compatto.