Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 - Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2004/2005
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatrice: Dott.ssa A. Scaramuzza - Tutore: I. Olivieri

01/03/2005

Esercizio 1. Verificare che ogni applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è continua rispetto alle distanze euclidee.

Esercizio 2. Verificare che un'isometria è una applicazione continua.

Esercizio 3. Sia (X, d) uno spazio metrico. Definiamo su X la seguente metrica:

$$\overline{d(x,y)} = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

Dopo aver verificato che $\overline{d}$ è una metrica, dimostrare che d e $\overline{d}$ sono topologicamente equivalenti.

Esercizio 4. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $U \subset X$. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
1. U è aperto;
2. $\forall\ x \in U\ \exists\ D_r(x)$ tale che $D_r(x) \subseteq U$;
3. $\forall\ x \in U\ \exists\ V_x$ aperto tale che $x \in V_x \subseteq U$.

Esercizio 5. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \subset X$ un suo sottoinsieme non vuoto. Sia d_Y la metrica indotta da (X, d) su Y. Dimostrare che:
1. Ogni disco $D_r^Y(y)$ di (Y, d_Y) è del tipo $D \cap Y$ con D un'opportuno disco aperto di (X,d) avete centro $y \in Y$;
2. Se D è un disco di (X, d), allora $D \cap Y$ è un aperto di (Y, d_Y)
3. Sia V un sottoinsieme di Y. Dimostrare che V è aperto in Y se e solo se esiste un aperto U in X tale che $U \cap Y = V$.