GE2 - Tutorato XI

Livia Corsi e Chiara Del Vescovo

16 dicembre 2004

1. In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo il riferimento proiettivo $RP(P_0, P_1, P_2, P_3, U)$, dove:
$$P_0 = [1,0,0,0], P_1 = [0,1,0,0], P_2 = [0,0,1,0],$$
$$P_3 = [0,0,0,1], U = [1,1,1,1].$$
Verificare che i cinque punti :
$$Q_i = \sum_{h=0,\dots,i} P_h \qquad \text{per } i = 0,1,2,3$$
e
$$V = P_0 - P_1 + P_2 - P_3$$
individuano un riferimento RP' di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ e determinare le equazioni del cambiamento di riferimento.
Scrivere l'equazione del piano individuato dai punti P_0, P_2, U nel nuovo riferimento RP'.

2. Sia $f : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ la proiettività di equazioni
$$\begin{cases} y_0 = x_0 - x_1 \\ y_1 = x_0 + 3x_1 \\ y_2 = 2x_2 \end{cases}$$
Trovare i punti fissi.

3. Sia dato $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ con riferimento proiettivo standard $RP(\mathbb{E})$.
Sono assegnate in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ le coniche proiettive $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ aventi rispettivamente equazioni:
$$F : 4x_0^2 - x_1^2 = 0 \qquad G : x_0^2 - 4x_2^2 = 0$$
   (a) Verificare che $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono proiettivamente equivalenti, determinando una proiettività f di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $f(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$;
   (b) Scrivere le equazioni di una proiettività di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che trasforma il supporto di $\mathcal{C}$ nel supporto di $\mathcal{D}$.

4. Nel piano proiettivo reale si consideri la famiglia $\mathcal{F}$ di coniche di equazione:
$$\lambda(x_1^2 + x_2^2 - x_0^2) + \mu x_1 x_2 = 0.$$
Si determinino le coniche degeneri della famiglia. Si determinino i punti comuni a tutte le coniche della famiglia. Si determini una proiettività $f : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, diversa dalla funzione identità, che manda ogni conica della famiglia $\mathcal{F}$ in una conica ancora appartenente alla stessa famiglia $\mathcal{F}$.

5. In un piano euclideo dotato di sistema di riferimento $RC(O, e_1, e_2)$ si consideri il seguente fascio di coniche:
$$m(x^2 + 2y^2 - 2) + n(xy + y) = 0.$$
Determinare le coniche degeneri del fascio e dire se sono a centro oppure no. Individuare inoltre le parabole della famiglia.

6. Nel piano euclideo $\mathbf{E}^2$ dotato di riferimento cartesiano $RC(O, e_1, e_2)$ si consideri la conica Γ di equazione
$$x^2 + y^2 + xy + x + y = 1.$$
Si determinino il centro C della conica e la traslazione $t : \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^2$ che manda C nell'origine. Sia ora $\Gamma' = t(\Gamma)$; si scrivano le equazioni degli assi di Γ'. Si dica, motivando la risposta, se esiste un'isometria $g : \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^2$ che manda un asse di Γ' nell'altro e trasforma Γ' in se stessa. Si scriva l'equazione di un'affinità che fissa l'origine e trasforma Γ' in una conica i cui assi coincidono con gli assi coordinati.