GE2 - Tutorato IV

Livia Corsi e Chiara Del Vescovo

21 ottobre 2004

1. Sia $V = V^2_{\mathbb{R}}$ un piano vettoriale euclideo con prodotto scalare $\langle , \rangle$ definito, rispetto ad una base $\mathbb{E}$ di V, dalla matrice
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
Sia $T : V \longrightarrow V$ l'operatore lineare definito da
$$T(\mathbb{E}) = \mathbb{E}\mathcal{B}, \quad \text{con} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
Verificare che T non è autoaggiunto (nonostante $\mathcal{B}$ sia simmetrica) e determinare la matrice dell'operatore aggiunto S di T (in base $\mathbb{E}$).

2. Sia $\mathbb{E} = (\ \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \ )$ una base di $\mathbb{R}^2$. Sia T l'operatore lineare di $\mathbb{R}^2$ così definito:
$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 \quad T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$
   (a) Determinare i valori $a, b \in \mathbb{R}$ per cui la matrice
   $$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}$$
   è matrice di un prodotto scalare $\langle , \rangle$ di $\mathbb{R}^2$ (rispetto ad $\mathbb{E}$).

   (b) Determinare i valori $a, b \in \mathbb{R}$ per cui T è autoaggiunto o per cui T è unitario (rispetto a $(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle)$).

3. In $\mathbb{R}^2$ è assegnato un prodotto scalare $\langle , \rangle$, definito, rispetto ad una base $\mathbb{E}$, dalla matrice
$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
Per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia $T_a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'operatore lineare così definito:
$$T_a(\mathbb{E}) = \mathbb{E}\mathcal{A}_a \quad \text{con} \quad \mathcal{A}_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Verificare che T_a è autoaggiunto $\iff \quad a = 2$.

(b) Determinare una base ortonormale $\mathbb{F}$ di $\mathbb{R}^2$ e verificare che (rispetto ad $\mathbb{F}$) la matrice di T_2 è simmetrica.

(c) Diagonalizzare T_2.

4. **Teorema di Jacobi-Sylvester**
Data una matrice quadrata $\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{R})$, si definiscono **minori della serie principale** di $\mathcal{A}$ i minori

$$\alpha_1 = |a_{11}| \quad \alpha_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \cdots \quad \alpha_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Se b è una forma bilineare simmetrica su $V = V_{\mathbb{R}}^n$ e $\mathcal{A}$ è la matrice associata a b risulta che:
b è un prodotto scalare $\iff$ gli n minori della serie principale di $\mathcal{A}$ sono positivi i.e.

$$\alpha_1 > 0 \quad \alpha_2 > 0 \quad \cdots \quad \alpha_n > 0.$$