GE2 - Tutorato III

Livia Corsi e Chiara Del Vescovo

14 ottobre 2004

1. Sia b la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$, definita, rispetto alla base canonica $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$ dalla matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Scrivere l'espressione di b in base $\mathbb{E}$ e verificare che b é un prodotto scalare.

   (b) Calcolare le equazioni cartesiane dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{e}_1{}^{\perp}, \quad \mathbf{e}_2{}^{\perp}, \quad \mathbf{e}_3{}^{\perp}, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle^{\perp}, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle^{\perp}, \quad \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle^{\perp}$$

   (c) Ortogonalizzare e ortonormalizzare (rispetto a b) la base $\mathbb{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

2. Sia $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$ una base di $\mathbb{R}^2$. Determinare i valori $a, b \in \mathbb{R}$ per cui la matrice

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}$$

   é matrice di un prodotto scalare $\langle , \rangle$ di $\mathbb{R}^2$ (rispetto ad $\mathbb{E}$)

3. Sia b un prodotto scalare su $V = V_{\mathbb{R}}$. Sia U un sottospazio vettoriale di V. Chiamiamo **operatore di proiezione ortogonale su U** l'operatore lineare $P : V \longrightarrow V$ di proiezione su U, parallelamente a $U^{\perp}$. Chiamiamo inoltre **operatore di simmetria ortogonale rispetto a U** l'operatore lineare $S : V \longrightarrow V$ di simmetria rispetto a U, parallelamente a $U^{\perp}$. Poniamo $V = V^3_{\mathbb{R}}$ e indichiamo con $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix}$ una base b-ortonormale di V. Se U é il piano vettoriale di equazione $x - y + 2z = 0$ (in base $\mathbb{E}$), determinare le espressioni di P e di S (in base $\mathbb{E}$).

4. Ortogonalizzare e ortonormalizzare la base canonica $\mathbb{E}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto ai seguenti prodotti scalari su $\mathbb{R}^3$.

(a) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + 3x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 4x_3y_3$

(b) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 + 3x_3y_3$

(c) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 +$
$+ x_2y_3 + x_3y_2$